MATHEMATIQUES I

Option scientifique **Yves MONLIBERT**

Description du problème

Le problème de cette année proposait de définir et d'étudier des propriétés de la pseudo inverse de Moore Penrose d'une matrice donnée.

La première partie consistait à définir la décomposition spectrale d'une matrice symétrique réelle du type ${}^tAA$. Pour ceci, on exigeait d'écrire dans la base canonique la matrice de la projection orthogonale sur un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Dans la deuxième partie, on introduisait la notion de pseudo solution de l'équation $AX = B$. Cela revenait à un problème de moindres carrés en minimisant la norme euclidienne de $AX - B$.

Parmi toutes les pseudo solutions, on s'intéressait à celle(s) dont la norme était minimale. L'existence et l'unicité d'une telle solution permettait ainsi d'introduire A^+ la matrice pseudo inverse de la matrice A. C'était l'objectif de la troisième partie.

Enfin, dans la dernière partie, on étudiait l'opérateur $A \to A^+$.

Le texte s'appuyait sur divers exemples permettant d'illustrer les résultats théoriques et de favoriser la compréhension des concepts mis en œuvre dans l'épreuve.

Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, bien structuré et de longueur raisonnable.
Les parties I et II étaient classiques et abordables pour tout candidat visant ce concours.
Les parties III et VI , comportaient des points plus délicats, permettant ainsi aux meilleurs de se valoriser.
Certains ont regretté l'absence d'analyse ; on aurait pu poser un problème de minimisation sous contrainte linéaire.
La lecture des copies a montré que quelques questions intermédiaires, portant par exemple sur la nullité de $P_i\,{}^tA$ et de AP_i pour $i \notin \Gamma(A)$ ou sur la structure de l'ensemble des pseudo solutions $\left(X_0 + \ker\left({}^tAA\right)\right)$ auraient pu donner quelques pistes aux étudiants sans porter atteinte au niveau d'exigence de l'épreuve.

Barème de la correction

37%,16%,22% et 27% des points furent respectivement affectées aux quatre parties du problème.
Par ailleurs, le jury attribua 22% des points au traitement des exemples.

Commentaires sur la correction

Voici question par question une liste des principales fautes rencontrées et quelques remarques.

1) La formule $p(x)=\sum_{i=1}^{k}\langle x|u_i\rangle\, u_i$ semble connue mais les candidats n'ont pas su traduire matriciellement ce résultat. On a vu souvent $U_i\,{}^tU_i=\langle u_i|u_i\rangle$.

2) b) Certains justifient $\left({}^tAA=0\Rightarrow A=0\right)$ par ${}^tAA=\|A\|_m^2=0$.

c) L'inclusion $\mathrm{im}\,{}^tAA\subset \mathrm{im}A$ n'a pas toujours été bien perçue et on trouve beaucoup de fautes du type : $\dim\ker A+\dim\mathrm{Im}\,A=\dim\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\dim\ker A=\dim\ker{}^tA$

3) a) Question classique bien traitée malgré l'oubli de la justification $\|X\|\neq 0$.

b) Beaucoup d'incohérences sont commises : $P_i\in\ker\left({}^tAA-\lambda_jI\right)$, $\langle P_i|P_j\rangle=0$,… et l'argument de l'orthogonalité des sous espaces propres est rarement évoqué.

4) a) Le calcul de ${}^tAA$ est souvent erroné et la méthode du pivot de Gauss est trop souvent utilisée pour la recherche des valeurs propres.

b) La preuve que le polynôme est bien annulateur a été plutôt bien vue mais peu ont bien montré que si $n\geq 2$, ses racines sont bien des valeurs propres.

6) Des difficultés pour prouver l'inégalité. Beaucoup remplacent Z par λY …puis manipulent peu honnêtement des inégalités pour arriver au résultat.

7) On ne trouve la preuve de $\left({}^tAAX={}^tAB\Rightarrow X \text{ est pseudo solution}\right)$ que dans de rares copies.

8) Assez bien traité (heureusement, pour beaucoup , que l'on avait $B\in\mathrm{Im}\,A$ sur l'exemple, car la confusion entre A et ${}^tAA$ commençait à se faire sentir).

9) La condition $\mathrm{rg}A=n$ est souvent donnée sans justification.

10) Question peu abordée où l'on trouve des confusions entre existence et unicité d'une pseudo solution de norme minimale et existence et unicité de la projection orthogonale.

12) Beaucoup de candidats ont du mal à formaliser le problème et à travailler avec une application non explicite.

13) Très peu de candidats arrivent à l'expression de A^+. On trouve le plus souvent l'argument peu honnête : » $\sum_{i\in\Gamma(A)}P_i=I_n$ « .

14) Les candidats font des simplifications abusives pour arriver au résultat de l'énoncé.

16)18)20) Les résultats de la question 15) sont utilisés mais ce n'était qu'un cas particulier.

Conclusion

Parmi les candidats, ceux qui se sont préparés sérieusement, ont été capables de répondre aux questions standards. Néanmoins, la correction des copies révèle qu'un nombre non négligeable a été dépassé par le niveau de l'épreuve . De nombreuses confusions ont été faites sur les concepts de base et beaucoup de candidats ont eu du mal à suivre l'enchaînement des questions et à faire des calculs cohérents sur les matrices. Enfin, on peut regretter une certaine désinvolture vis à vis des questions numériques .

La moyenne de l'épreuve s'établit à 9,2 . L'écart type établi à 4,1 révèle que l'épreuve a été sélective. Un nombre satisfaisant de bonnes copies a obtenu la note maximale.