Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2017

Présentation de l'épreuve :

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
- Le sujet balayait largement le programme en donnant, cette année, une place importante à l'algèbre linéaire et à l'algèbre bilinéaire (pas de probabilités discrètes pour une fois).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Deux exercices et le problème comportaient une ou plusieurs questions d'informatique.
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, peut-être un peu plus classique que les années précédentes, mais comportant, malgré tout, quelques questions particulièrement difficiles où seuls les bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leur faculté à raisonner sur des situations abstraites.

Description du sujet :

L'exercice 1 proposait l'étude de la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

La première question demandait de compléter deux scripts `Scilab` afin qu'ils calculent, de deux façons différentes, la valeur de $f_n(x)$ pour *n* et *x* entrés par l'utilisateur.

La suite de l'exercice consistait en l'étude de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où α_n est l'unique solution sur $[0,1]$ de l'équation $f_n(x)=1$. Une dernière question portait sur le rôle d'un script `Scilab`, qui donnait, en fait, une valeur approchée de α_n par excès.

- Cet exercice, jugé facile par les correcteurs, a permis à tous les candidats, ou presque, de gagner quelques points.
- Notons tout de même que de nombreux candidats ont oublié le cours de première année et ont des problèmes pour simplifier $f_n(x)$ dans le cas où x est différent de 1, ou pour citer correctement les conditions d'application du théorème de la bijection (ce dernier étant souvent énoncé « comme en terminale »).

L'exercice 2, portait sur la partie probabilités du programme. On considérait une suite $X_1,...,X_n,...$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

L'objectif était dans un premier temps d'étudier la variable $M_n = \max(X_1, X_2,..., X_n)$, puis de prouver la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $Y_n = n(1-M_n)$, vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. En amont, une simulation informatique permettait de conjecturer ce résultat.

• Cet exercice a été assez bien réussi, quelques questions difficiles comme 1e), 2b) et 3b) mises à part.

L'exercice 3 portait sur l'algèbre bilinéaire. On considérait un espace euclidien E de dimension $n+1$. rapporté à une base orthonormale $(\varepsilon_0, \varepsilon_1,..., \varepsilon_n)$. On définissait les vecteurs $u = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k$ et $e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right)$, pour i dans $[\![0,n]\!]$, ainsi que le sous-espace $F = \left(\mathrm{Vect}(u)\right)^{\perp}$.

L'objectif était de montrer que l'application *f* de $F\times F$ dans $\mathbb{R}$ définie ci-dessous est nulle :

$$\forall (x,y)\in F\times F\,,\ f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle$$

• Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement que très peu de connaissances sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année.

• De très nombreux candidats sont rapidement submergés par les calculs.

Le problème, portant sur le programme d'algèbre, proposait l'étude de deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le premier, noté φ, qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$$

Le deuxième, noté ψ, qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe la fonction $F = \psi(P)$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ F(x) = e^{x}\int_{x}^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$$

L'objectif était de montrer que ces deux endomorphismes sont égaux.

• La plupart des candidats ont abordé le problème, avec une certaine réussite, du moins dans les premières questions.

• Certains candidats ont confondu allègrement $(\psi(P))'$ et $\psi(P')$ sans argumenter.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3787 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,346 sur 20 (supérieure de 0,27 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,783 (très légèrement inférieur à celui de l'année dernière, mais toujours important).

• 31,8% des candidats, contre 35,4% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 11,85% ont une note inférieure à 4).

• 22,3% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2016 qui était de 22,1%).

• 26,16% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2016 qui était de 25%).

Conclusion :

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées mais il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon, proposent des copies sales et raturées, parfois sans les numéros des questions traitées, et truffent leur copie d'abréviations non officielles (par exemple écrire SRC, pour « sous réserve de convergence » sous une égalité, et en plus ne pas vérifier la convergence de l'intégrale étudiée) : les correcteurs n'apprécient pas du tout et n'ont alors aucune compassion pour ces candidats qui bien évidemment s'exposent à des sanctions.

Un nombre non négligeable de candidats restent adeptes des réponses floues : il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable.

La mauvaise maîtrise des techniques de base et des calculs élémentaires reste une constante et semble même s'aggraver pour un nombre non négligeable de candidats. Il serait bien que les futurs candidats investissent un peu de leur temps sur ces deux points et n'oublient pas qu'une épreuve de concours valide deux années d'étude : il faut donc garder en tête les connaissances de première année.

L'investissement en informatique, à peu près stable par rapport à l'année dernière, a permis à de nombreux candidats de glaner des points sans y passer énormément de temps.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Pour finir, il va de soi que, s'il est demandé de compléter une commande Scilab, on pénalise très peu si le candidat en écrit plusieurs (pourvu qu'elles répondent à la question).

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.