EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{2}{\pi(e^t + e^{-t})}$.

1. (a) Soit la fonction g définie sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ par : Pour tout $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $g(\theta) = \ln(\tan\theta)$.

   Montrer que g est de classe C^1 sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.

   (b) En déduire grâce au changement de variable $t = g(\theta)$ que f est une densité de probabilité.
   On note dans toute la suite X une variable aléatoire admettant une densité égale à f.

   (c) Montrer que f est paire , puis que X admet une espérance et que celle-ci est nulle.

2. *Ce paragraphe établit des préliminaires au calcul de la variance de X.* Soit p un entier naturel non nul.

   (a) Soit Y une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre p.
   Donner l'espérance et la variance de Y. En déduire l'espérance $E(Y^2)$.

   (b) On note $J_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt$. Déduire du (a) la convergence et la valeur de J_p en fonction de p .

   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1 + e^{-2t}} dt$ converge et que $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1 + e^{-2t}} dt = 0$.

3. *On exprime dans ce paragraphe la variance de X à l'aide d'une série.*

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{1}{1 + e^{-2t}} = (-1)^{n+1} \dfrac{e^{-2(n+1)t}}{1 + e^{-2t}} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt}$.

   (b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$: $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1} \dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1 + e^{-2t}} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-(2k+1)t}\right]$.

   (c) Montrer finalement que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

4. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On note h une densité de U et de V.

   (a) Montrer que la variable aléatoire $A = \ln(|U|)$ est une variable aléatoire à densité admettant

   une densité f_A telle que pour tout réel x , $f_A(x) = 2e^x h(e^x)$.

   (b) Montrer que la variable aléatoire $B = -\ln(|V|)$ est une variable aléatoire à densité admettant une densité f_B telle que pour tout réel x , $f_B(x) = f_A(-x)$.

   (c) Soit C la variable aléatoire à densité $C = A + B = \ln\left(\left|\dfrac{U}{V}\right|\right)$.

   Calculer pour tout réel strictement positif y l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_B(-\ln u)\, f_A(\ln(uy)) du$.

   En effectuant dans cette intégrale le changement de variable $u = e^{-t}$ en déduire une densité de C.
   Vérifier que C suit la même loi que X .

EXERCICE 2

Dans cet exercice , n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $<.,.>$ et de norme associée notée $\|.\|$.

On note BC la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

On considère l'endomorphisme f de E tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $f(e_i) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

On note I la matrice carrée unité d'ordre n .

Etant donnés n réels $a_1, a_2, \cdots, a_n$, on note $m = \min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et on suppose que $m > n$.

On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}, d(e_i) = a_i\, e_i$.

On note enfin g l'endomorphisme de E défini par $g = f + d$.

1. (a) Montrer que le vecteur $w = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ est un vecteur propre de f.
A quelle valeur propre est-il associé ?

   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en préciser une base orthonormée.

   (c) Prouver que $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de E de base $\mathrm{B}' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \cdots, e_n - e_1)$.

   (d) Justifier que $\mathrm{Im}(f) = (Ker(f))^{\perp}$ (orthogonal de $Ker(f)$ pour le produit scalaire canonique).

   (e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f, et que pour tout vecteur u de E , $\|f(u)\| \leq n\|u\|$.

2. (a) Justifier que d est un automorphisme de E .

   (b) Montrer que pour tout u de E , $\|d(u)\| \geq m\|u\|$, et que pour tout v de E , $\left\|d^{-1}(v)\right\| \leq \dfrac{1}{m}\|v\|$.

   (c) Prouver que pour tout vecteur non nul u de E , $\|f(u)\| < \|d(u)\|$.

   (d) En déduire en étudiant $Ker(g)$ que l'endomorphisme g est un automorphisme de E .

3. Soit un vecteur v fixé de E . Il existe d'après le 2.(d). un unique vecteur u de E tel que $g(u) = v$.

   On considère alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} u_0 = v \\ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ u_{k+1} = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u_k) \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel k : $u_{k+1} - u = -(d^{-1} \circ f)(u_k - u)$.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel k : $\|u_{k+1} - u\| \leq \dfrac{n}{m}\|u_k - u\|$.

   Montrer enfin que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|u_k - u\| = 0$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul.
On dispose de deux jeux **identiques** de n cartes chacun , dont les dos sont indiscernables.
Chacun de ces jeux est composé de n figurines représentant des animaux différents.

Partie A

On choisit au hasard et simultanément une carte dans chaque jeu , formant ainsi une paire de cartes , mise de côté.
On recommence n fois ce tirage sans remise. On dispose alors de n paires de cartes.

1. Quelle est la probabilité que les n paires d'animaux soient reconstituées ?

2. Soit k un entier naturel de $\{0, \cdots, n-1\}$ et k paires d'animaux fixées arbitrairement.
   Quelle est la probabilité qu'au moins ces k paires d'animaux soient reconstituées ?

3. Montrer grâce à la formule du crible que la probabilité p_n qu'aucune paire d'animaux ne soit reconstituée
   est égale à $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$.

Partie B

On mélange maintenant les deux jeux dans une urne.
A chaque tour on tire une poignée de deux cartes. Si les animaux représentés sur ces deux cartes sont les mêmes , on ne remet pas les deux cartes dans l'urne , sinon on les remet dans l'urne.
Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de tours qui ont été nécessaires pour vider l'urne , en reconstituant ainsi les n paires de figurines d'animaux.

1. Déterminer la loi et l'espérance de la variable T_1.
2. Déterminer $T_n(\Omega)$ pour n supérieur ou égal à 2.
3. (a) En utilisant les événements C_i : " lors du i - ième tour , une paire d'animaux est reconstituée ", montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :
   $$P(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$
   (b) Montrer que T_2 admet une espérance et la calculer.
4. (a) Déterminer les probabilités $P(T_3 = 3)$, $P(T_3 = 4)$.
   En utilisant le système complet d'événements $(C_1, \overline{C_1})$, déterminer $P(T_3 = 5)$.
   (b) Montrer plus généralement que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour $k \geq n-1$:
   $$P(T_n = k+1) = \frac{n}{C_{2n}^2} P(T_{n-1} = k) + \frac{C_{2n}^2 - n}{C_{2n}^2} P(T_n = k).$$
   (c) *On admet dans cette question que pour tout entier naturel non nul n , T_n admet une espérance.*
   Montrer en multipliant l'égalité précédente par k et en sommant de $k = n-1$ à $+\infty$ que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1$.
   En déduire pour tout entier naturel non nul n une expression de $E(T_n)$ en fonction de n .