BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 296

Conception : EMLYON Business School

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 28 avril 2015 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

3. a. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln\big(1-U\big)$?

b. Écrire une fonction en Scilab qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. **a.** Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, la probabilité $\mathbf{P}(T_n \leqslant x)$.

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

5. **a.** Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

b. Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbf{E}(T_2)$ de T_2.

6. **a.** Vérifier : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x).$

b. Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} x\big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbf{E}(T_{n+1})$ et $\mathbf{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbf{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $\quad (N = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_k \leqslant a)$. En déduire la probabilité $\mathbf{P}(N = 0)$.

8. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(N = n) = \big(1 - \mathrm{e}^{-a}\big)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-a}.$

9. Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(N)$ et la variance $\mathbf{V}(N)$ de N.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}.$$

10. Justifier : $\quad \mathbf{P}(Z \leqslant a) = 0.$

11. Soit $x \in]a\,; +\infty[$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité d'événements :

$$\big((N = n) \cap (Z \leqslant x)\big) = \begin{cases} (a < X_1 \leqslant x) & \text{si } n = 1 \\ (T_{n-1} \leqslant a) \cap (a < X_n \leqslant x) & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}.$$

En déduire la probabilité $\mathbf{P}\big((N = n) \cap (Z \leqslant x)\big)$.

b. Montrer alors : $\quad \mathbf{P}(Z \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}.$

12. **a.** Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbf{V}(Z)$.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement suivant : $\quad 2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\quad \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \varphi(x) = x^2\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Établir que l'équation $\quad \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}, \quad$ d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[$.

On considère l'application $\quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$,

et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Étude d'une suite

3. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1$.

4. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

7. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}\right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe C^2 suivante :

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto g(x,y) = \frac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\,\mathrm{e}^y.$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.

10. Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x,y).

11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question **2.**.

12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.

On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x \qquad \text{et} \qquad \theta : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto 0_E.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \qquad f^2 + i \neq \theta, \qquad f \circ (f^2 + i) = \theta,$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. **a.** Montrer que f n'est pas bijectif.

b. En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que :

$$u \neq 0_E \quad \text{et} \quad f(u) = 0_E.$$

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que :

$$v \neq 0_E \quad \text{et} \quad f^2(v) = -v.$$

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note : $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

6. **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

b. Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $(A,\ B,\ C)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC\,;\,(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

8. Montrer : $\{M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})\,;\,CM = MC\} = \mathcal{F}$.

9. **a.** Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

b. En déduire une matrice M de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

10. On note $g = f^2 - i$.

Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et i.

• FIN •

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1200 – D'après documents fournis