

MATHEMATIQUES S (épreuve n° 280)

ANNEE 2014

Epreuve conçue par H E C Paris

Voie économique et commerciale

Le sujet

Le thème du problème de cette année était la théorie du transport, introduite en 1781 par Gaspard Monge (*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*), développée en 1942 par Leonid Kantorovich (*On the translocation of masses*) et qui connaît actuellement un regain d'intérêt de la part de nombreux chercheurs tant sur le plan théorique que sur celui des applications (par exemple, Cédric Villani en 2004, *Transport optimal de mesure : coup de neuf sur un très vieux problème*).

Très schématiquement, il s'agit de trouver une fonction (si elle existe) dite de transport, qui minimise le coût total du transport (distance) ou encore, le problème consiste à transformer une densité de probabilité multidimensionnelle en une autre densité en minimisant un coût de transport (par exemple, des particules sont réparties selon la densité f et on veut les répartir selon la densité g en minimisant le déplacement moyen).

Les résultats statistiques

Le barème de notation accordait des poids respectifs de 20% au préliminaire, 35% à la première partie, 22% à la partie II et 23% à la partie III.

Sur les 2593 candidats présents à cette épreuve, la note moyenne s'établit à 10,51 avec un écart-type de 5,16, particulièrement élevé.

La note médiane est de 10,9 ; un quart des candidats obtient une note inférieure à 6,6 et 75% des candidats ont obtenu une note supérieure à 14,9.

Environ 44% des candidats obtiennent une note supérieure à 12 et près de 16% des candidats se voient attribuer une note supérieure à 16. On observe enfin 3,1% des candidats qui obtiennent une note supérieure à 19 dont 50 d'entre eux qui culminent à 20.

La note maximale de 20 fut accordée aux candidats ayant résolu avec succès au moins les deux-tiers du problème. Plus précisément, on obtenait 20 si on traitait correctement toutes les questions jusqu'à la question 9.b) ou bien si on parvenait à la question 13.a) en subissant quelques « accidents de parcours » dont les plus fréquents furent la question 1 (réponses souvent très farfelues telles que N^2 ou « une infinité »), la question 2.c) (les inégalités strictes n'ont pratiquement jamais été obtenues) et la question 5.c) (incompréhension de ce qui était demandé).

Par école, les statistiques sont les suivantes :

- HEC (2265 candidats) – moyenne : 11,08 ; écart-type : 5,03.
- ESCP Europe (2453 candidats) – moyenne : 10,77 ; écart-type : 5,08.

Commentaires

Le sujet de cette année ne comportait aucune question utilisant l'algèbre linéaire, mais le reste du programme (analyse, probabilités) était assez largement couvert.

Un préliminaire et trois parties largement indépendantes et équilibrées au niveau du barème (avec un avantage cependant à la partie I) permettaient aux candidats de montrer la solidité de leurs connaissances, leur capacité d'adaptation à utiliser des notions nouvelles et leur aptitude au calcul.

Le préliminaire comprenait trois questions portant sur le dénombrement, un calcul de loi de probabilité dans lequel intervenait la fonction partie entière et enfin, un calcul d'intégrales généralisées utile pour la suite du problème.

Comme nous l'avons signalé plus haut, la question de dénombrement donna lieu à des réponses parfois surprenantes, notamment par leur incohérence (plus d'applications injectives que d'applications quelconques).

En ce qui concerne le calcul d'intégrales généralisées, les théorèmes du cours sont connus, souvent bien utilisés avec néanmoins un manque de soin dans les questions de signes. D'ailleurs, cela se reproduira dans les calculs du même type dans la question 7.

La partie I étudiait dans quelques cas particuliers (transport d'une variable aléatoire de loi uniforme vers une loi géométrique ou une loi normale) le problème du transport dans une situation aléatoire.

Cette partie demandait de l'aisance dans les calculs de lois de probabilité, d'espérance et permettait de révéler les candidats qui avaient compris la situation décrite et explorée par le problème.

Dans la partie II, on examinait le cas du transport optimal dans une situation déterministe, ce qui nécessitait de la part des candidats une grande rigueur dans la manipulation des sommes et des indices. Malheureusement, beaucoup trop de candidats ont tenté d'exploiter le fait que de nombreuses réponses étaient données par l'énoncé ; en revanche, les meilleurs ont décelé, voire résolu, le problème qui pouvait se poser lorsque d_j était négatif (question 9.b).

La partie III proposait une démonstration du problème du transport optimal dans le cas particulier d'une loi uniforme unidimensionnelle.

Cette dernière partie a permis à quelques candidats de montrer l'étendue de leur talent, mais la majorité d'entre eux n'a traitée que la question 12.

Dans l'ensemble, les copies sont correctement rédigées et lisibles, les tentatives de « bluff » sont très minoritaires. Les mauvaises copies sont celles des candidats dont les connaissances en probabilité demeurent insuffisantes ou qui sont incapables de conduire un calcul jusqu'à son terme.