BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

292

EPREUVE ESC

Conception : E.S.C. CHAMBERY

ESC__MATS

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Mardi 12 mai 2009, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère une matrice symétrique H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $H^2 = H$.
Pour tout réel a , on note alors $M(a) = aI + (1-a)H$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Justifier que pour tout réel a , $M(a)$ est une matrice symétrique et diagonalisable .

   (b) Montrer que pour tous réels a et b , $M(a)M(b) = M(ab)$.

2. Soit a un réel strictement positif .

   (a) Montrer que $M(a)$ est inversible et que $M(\frac{1}{a})$ est son inverse .

   (b) Justifier que $M(a) = {}^t(\, M(\sqrt{a})\,)\, M(\sqrt{a})$.

On suppose que X désigne une matrice colonne propre de $M(a)$ associée à la valeur propre λ .

   (c) Montrer que ${}^t(\, M(\sqrt{a})\, X\,)\,(\, M(\sqrt{a})\, X\,) = \lambda\, {}^tX\, X$ puis justifier que $\lambda > 0$.

   (d) En déduire que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(\,(x, y, z),(x', y', z')\,) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} M(a) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

3. Application : On considère le cas où $a = 4$ et $H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $H^2 = H$ (on détaillera les calculs) et expliciter la matrice $M(4)$.

   (b) On note la famille $\mathcal{B} = \left[\, (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\,\right]$.

   On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la famille $\mathcal{B}$.
   Calculer ${}^tP\,P$. Que peut-on en déduire concernant la famille $\mathcal{B}$?
   Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale pour le produit scalaire φ.

EXERCICE 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.
On définit sur E l'application φ , qui , à toute fonction f de E associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par les relations suivantes :

$$(\varphi(f))\,(0) = f(0)$$
$$\text{si } x > 0 \text{ , } (\varphi(f))\,(x) = \frac{6}{x^6}\int_0^x t^5 f(t)\,dt \text{ .}$$

1. Soit $\alpha \geq 0$. On note pour tout $x \geq 0$: $h_\alpha(x) = x^\alpha$. Expliciter $\varphi(h_\alpha)$.

2. Soit f un vecteur quelconque de E .

   (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $(\min\limits_{[0;x]} f)\dfrac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t)dt \leq (\max\limits_{[0;x]} f)\dfrac{x^6}{6}$.

   (b) Justifier que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\min\limits_{[0;x]} f) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\max\limits_{[0;x]} f) = f(0)$ et que $\varphi(f)$ est continue en 0 à droite .

   (c) Justifier que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que pour tout $x > 0$:
   $$(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x}\left(f(x) - (\varphi(f))(x) \right) .$$

3. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .

   (b) Justifier que $Ker(\varphi)$ ne contient que la fonction nulle .

   (c) Que peut-on dire de la fonction h_α , définie en question 1 , relativement à φ ?

4. Soient λ un réel non nul et g une fonction non nulle de E tels que $\varphi(g) = \lambda\, g$.

   (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $x > 0$:
   $$\frac{6(1-\lambda)}{\lambda} g(x) = x\, g'(x) .$$

   (b) On note pour $x > 0$: $u(x) = x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x)$.
   Vérifier que u est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   En déduire que pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1) . x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}}$.
   En utilisant la continuité de g en 0 à droite , montrer que $\lambda \in]\,0\,;1\,]$.

5. Application : Déterminer $Ker\,(\varphi - \frac{1}{3}\, id_E)$ et $Ker\,(\varphi - 2\, id_E)$.

EXERCICE 3

On considère le programme suivant , où l'on rappelle que **random** est une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes .

```
program simulations ;
var U , V , X , Y , Z : real ;
begin
randomize ;
U : = random ; V : = random ;
X : = - ln ( U ) ; Y : = - ln ( V ) ;
Z : = X + Y ;
end .
```

1. Montrer que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1 .
   (On considérera que , du fait que $U = 0$ est de probabilité nulle , $U(\Omega) =]\,0\,;1\,]$).

2. (a) Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes .

   (b) Déterminer une densité f de Z . Vérifier que si $x \geq 0$, $f(x) = x\,e^{-x}$.

   (c) Déterminer la fonction de répartition de Z .

3. (a) On note $T = e^Z$.
Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité .

(b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ h(t) = \dfrac{\ln t}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de la variable aléatoire $\dfrac{1}{UV}$.

EXERCICE 4

On examine dans cet exercice deux méthodes différentes pour tester la contamination par une bactérie de 400 bouteilles de lait choisies au hasard sur le territoire .
Dans tout l'exercice , θ est un réel fixé , élément de l'intervalle $[\,0\,;\frac{1}{10}\,]$.
On suppose que pour chaque bouteille , la probabilité de contamination est égale au réel θ .

On dispose d'un test permettant de manière infaillible de savoir si l'échantillon de lait qu'on lui soumet est contaminé ou non (quel que soit le volume de cet échantillon) .

1. Dans cette question on adopte une méthode simple consistant à tester une par une chaque bouteille .

   On note X_k la variable de Bernoulli valant 1 si la k- ième bouteille testée est contaminée et 0 si la k- ième bouteille testée est saine .

On supposera dans tout l'exercice que les variables $(X_k)_{1\leq k\leq 400}$ sont mutuellement indépendantes.

(a) Justifier que la variable $Z = \frac{1}{400}\sum_{k=1}^{400} X_k$ est un estimateur sans biais de θ .

(b) Déterminer la variance $V(Z)$ et justifier que $V(Z) \leq \dfrac{1}{4000}$.

(c) Montrer que $P(\,|\,Z - \theta\,| \geq 0{,}05\,) \leq 0{,}1$.
Que peut-on en déduire sur l'intervalle de confiance $[\,Z - 0{,}05\,;\,Z + 0{,}05\,]$? (Justifier) .

2. Dans cette question on examine une méthode moins directe :
   Les 400 bouteilles sont regroupées en 40 lots de 10 bouteilles .
   On remplit alors 40 jerrycans $(\,J_n\,)_{1\leq n\leq 40}$ en versant dans chacun la quasi-totalité des 10 bouteilles d'un lot . (on garde dans chaque bouteille un peu de lait pour un futur deuxième examen éventuel) .

   On teste ensuite chacun des 40 jerrycans :
   Si un jerrycan est contaminé , on teste une à une les 10 bouteilles incriminées .
   Si un jerrycan n'est pas contaminé , on considère les 10 bouteilles dont il est rempli comme saines .

   On note Y_n la variable de Bernoulli valant 1 si le n- ième jerrycan est contaminé et 0 sinon .
   Enfin on note T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans cette méthode .

(a) Montrer que pour tout entier n de $\{\,1\,,\dots,\,40\,\}$, $E(Y_n) = 1 - (1-\theta)^{10}$.

(b) Justifier que $T = 40 + 10\,Y_1 + 10\,Y_2 + \dots + 10\,Y_{40}$ et que $E(T) = 440 - 400\,(1-\theta)^{10}$.

(c) En déduire que cette méthode est préférable à la première si et seulement si
$\theta \leq 1 - e^{-\frac{\ln 10}{10}}$. Est-ce le cas ici ? (On donne $e^{-\frac{\ln 10}{10}} \approx 0{,}79$) .