BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

MATHÉMATIQUES S
(ÉPREUVE N° 295)
ANNÉE 2018
ÉPREUVE CONÇUE PAR EMLYON BUSINESS SCHOOL
VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

1 Remarques générales

Le sujet 2018 de la voie Scientifique était composé, sur le même modèle que les années précédentes, de deux problèmes indépendants, balayant une large partie du programme officiel ECS. Les questions se veulent de difficulté progressive dans chacun des deux problèmes, visant à évaluer les competences des candidats dans les points suivants : en priorité elles vérifient la bonne connaissance du cours, ce qui permet à des candidats sérieux mais de niveau modeste d'obtenir une note loin d'être déshonorante ; elles évaluent ensuite les capacités des candidats à former des raisonnements rigoureux et argumentés, reposant sur des connaissances solides, sur des questions soit de type « classiques », soit plus délicates demandant alors un certain recul vis-à-vis des notions du programme.

Il n'était pas indispensable d'avoir traité la totalité du sujet pour obtenir une excellente note. Le sujet étant long, il est toujours préférable de mener un raisonnement rigoureux et complet sur seulement une moitié du sujet, plutôt que de donner tous les résultats (même justes) sur de nombreuses questions de manière trop rapide et sans explication réelle ; un tel raisonnement ne fournissant alors en général que peu de points au barème.

Sur la majorité des questions, le barème permet d'évaluer les compétences des candidats sur trois points :

* en premier lieu, comprendre la problématique mise en jeu dans la question, à savoir bien lire la question demandée pour percevoir ce que l'on peut attendre d'eux à ce moment précis du sujet, problématiser correctement l'intitulé de la question et utiliser alors à bon escient celles qui précédent ;

* en second lieu, connaître et maîtriser les définitions et théorèmes du programme des deux années ECS, en donnant le cas échéant les hypothèses nécessaires ou suffisantes à leur application, dans le respect strict du cadre fixé par le programme officiel ;
* une dernière part des questions se veut calculatoire, permettant aux candidats ayant du mal à mener des raisonnements abstraits, de pouvoir a minima mettre en application les techniques et formules vues en classe, par exemple dans les questions d'analyse.

L'épreuve contient enfin chaque année au moins une question d'informatique en langage Scilab correspondant au programme officiel ECS, avec un souci d'évaluer les compétences des candidats dans ce domaine sur des questions de type varié, d'un exercice à l'autre, d'une année à la suivante. Les questions d'informatique peuvent essentiellement être de trois formats : soit un programme complet ou non à achever et/ou interpréter (format absent cette année), soit un script à écrire entièrement (question **Pb1.IV.10.a.** cette année), soit une utilisation de sorties graphiques pour permettre de conjecturer un résultat vérifié ensuite dans le sujet (question **Pb1.IV.10.b.** cette année). Les questions d'informatique sont en général évaluées avec une large bienveillance et représentent une part non négligeable du barème total, nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à aborder davantage ces questions qui sont dès lors bien mieux récompensées que d'autres questions plus difficiles du sujet.

Il est attendu des candidats une certaine honnêteté intellectuelle dans leur copie. On voit encore un trop grand nombre de copies qui tentent de maquiller certains calculs erronés pour parvenir aux résultats attendus, ou prenant des libertés trop larges sur les hypothèses des théorèmes d'application du cours. Il peut donc être utile de rappeler que de tels comportements dans les copies sont en général très mal perçus par les correcteurs, notamment sur les premières pages de la copie. En effet, ceci provoque dès lors un manque de confiance du correcteur vis-à-vis du candidat, ce qui mettra en doute ensuite la plupart des questions suivantes. Il est donc toujours préférable pour un candidat de mener ses calculs, et s'il voit une incohérence avec le sujet et qu'il ne trouve pas son erreur, a minima de signaler sur sa copie qu'il repère une disparité entre sa réponse et celle attendue, et qu'il admet le résultat pour continuer la suite ou qu'il pense repérer une erreur dans l'énoncé et continue alors dans ce sens. De même, les candidats qui se contentent d'énoncer les résultats sans les justifier n'obtiennent que peu de points.

Enfin, les correcteurs s'attachent à toujours valoriser les copies qui sont bien présentées plutôt que celles qui relèvent d'un effort trop minimaliste pour mettre en valeur leurs réponses. La numérotation des questions abordées doit être clairement indiquée, et dans la mesure du possible les correcteurs apprécient que les résultats soient clairement visibles dans la copies, par exemple en les soulignant ou les encadrant (à la règle !), ou grâce à des couleurs. Les candidats ne faisant pas d'effort de bonne présentation ou de bonne écriture ont de grandes chances de ne pas se voir attribuer de points sur certaines questions par le correcteur, tout simplement car la copie est illisible donc les arguments ne sont pas jugés présents sur la copie, ou bien car en cas de doute sur une réponse (argument partiel ou manquant) le correcteur choisira alors toujours la version pénalisante pour dévaloriser la copies face aux autres qui font l'effort d'une bonne rédaction et d'une belle présentation. Nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à soigner cet aspect de leur copie.

2 Éléments statistiques

Sur l'épreuve de la voie Scientifique 2018, 3 872 candidats ont composé, et ont obtenu une moyenne générale de 10,92 sur 20, avec un écart-type de 5,77.

L'écart-type très haut témoigne d'une grande hétérogénéité dans les copies corrigées. Alors que certains candidats traitent pratiquement l'intégralité du sujet avec une maîtrise avancée des notions du programme, d'autres montrent des difficultés dès les toutes premières questions obtenant alors des notes très faibles, en grande partie à cause d'un travail insuffisant lors des deux années de classe préparatoire sur l'apprentissage du cours.

Les copies étaient corrigées cette année avec un barème portant sur 113 points, chaque question ayant un nombre de points entier compris entre 1 et 4, les deux problèmes étant de poids relativement égal. Les notes des candidats sont alors obtenues en multipliant cette note brute sur 113 par un coefficient et en majorant à 20, les notes étant ensuite harmonisées au niveau national entre les correcteurs. On pouvait obtenir 20 à l'épreuve 2018 en atteignant environ les deux tiers des points du barème. NB : Ces éléments statistiques étaient de rigueur en 2018 mais ne préjugent en aucune manière des consignes de correction pour les années à venir, le barème dépendant chaque année de la longueur du sujet et de la difficulté des questions ; de même, la proportion du sujet à traiter pour obtenir la note maximale est très variable d'une année à l'autre.

Outre les questions difficiles présentes en fin des deux problèmes, un candidat sérieux et rigoureux traitant correctement et entièrement une partie du sujet pouvait donc espérer avoir une note tout à fait honorable. Il ne faut donc pas hésiter pour les candidats les plus faibles à essayer de repérer les questions plus faciles du sujet (qui ne sont pas uniquement les premières de chaque problème) afin de gagner des points aisément.

À l'inverse, même si un survol rapide du sujet et un « grapillage de points » peut être partiellement payant, les candidats auront toujours plus de points en se focalisant sur une partie entière d'un problème. En effet, les questions qui relèvent de la bonne compréhension de l'enchaînement des questions sont en général valorisées, et permettent à des candidats de niveau modeste de pouvoir montrer qu'ils savent manier des raisonnements déductifs, et ils peuvent alors plus facilement se démarquer des candidats dont le niveau est plus faible.

Enfin, les questions plus délicates sont bien notées sous réserve qu'elles soient extrêmement bien traitées. En analyse par exemple, les points seront surtout mis sur la vérification des hypothèses requises ; en algèbre, les points seront en priorité attribués à la bonne utilisation des raisonnements fondamentaux algébristes et à une restitution adéquate du vocabulaire attendu.

3 Épreuve 2018

Le sujet était composé de deux problèmes indépendants et plutôt « classiques », dans le sens où les candidats sont supposés avoir pour la plupart déjà travaillé durant leurs deux années de classe préparatoire le même type de raisonnements présents dans le sujet, en traitant des problèmes proches parmi les annales ou en s'entraînant sur des exercices d'applications du cours mettant en jeu des techniques et méthodes similaires. L'équipe de conception s'attache chaque année à ce que le sujet réponde à ce cahier des charges, de manière à ce que le sujet soit conforme au programme, progressif, de manière à valoriser les candidats ayant effectué un travail régulier et sérieux en CPGE.

Le Problème 1 avait pour but d'évaluer un équivalent de $\mathbf{P}([X = Y])$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ. Pour cela, on étudiait une fonction définie par une intégrale impropre à paramètre, en déterminant une expression de cette fonction sous forme de la somme d'une série dont le terme général fait apparaître la suite des intégrales de Wallis.

Ce problème ne comportait pas de question bloquante, dans le sens où la plupart des réponses nécessaires à sa bonne compréhension étaient données par l'énoncé, ce qui laissait la possibilité à un candidat butant sur certaines questions d'avancer sur les questions suivantes.

Le Problème 2 avait pour but l'étude d'une suite de variables aléatoires réelles finies, dont la loi générale est obtenue à l'aide de sa fonction génératrice. Pour cela, on montre que la suite des fonctions génératrices est obtenue par itérations successives d'un certain endomorphisme de polynômes en dimension finie, dont on étudie au préalable le comportement en puissance via sa diagonalisabilité et son écriture dans une bonne base de polynômes propres.

La Partie I du Problème 2, à l'exclusion de la question **Pb2.I.3.b.** qui était plus délicate, représente un exercice classique d'algèbre linéaire qui est un objectif raisonnable pour tout élève sortant de deux années ECS. La partie II demandait une bonne lecture du sujet afin de bien comprendre l'expérience aléatoire mise en jeu et la modélisation proposée. Les candidats ont bien entamé cette partie mais se sont arrêtés brièvement, soit lorsque les difficultés devenaient trop importante, soit par manque de temps sur la fin de l'épreuve.

Les candidats ont en général abordé les deux problèmes dans l'ordre naturel proposé par le sujet (Problème 1, puis Problème 2). Les correcteurs ont estimé qu'il s'agissait d'un excellent sujet, de difficulté modérée et de longueur raisonnée, bien adapté au niveau des candidats. Ne comportant pas d'erreur d'énoncé et conforme au cadre strict défini par le programme et son esprit, il a atteint ses objectifs en terme de progressivité, ce qui a permis de classer les candidats de manière tout à fait satisfaisante, comme le montre l'écart-type proche de 6. Les questions proches du cours ont permis aux copies modestes de mettre en valeur leur travail d'apprentissage, les questions plus fines ou de synthèse ont permis aux meilleurs candidats de se démarquer et d'obtenir des notes excellentes.

4 Analyse en détail du Problème 1

Partie I : Étude d'une suite d'intégrales

1. Cette question facile, est traitée correctement dans la grande majorité des copies. Pour obtenir l'intégralité des points, il fallait aller au bout du calcul de W_1, à savoir écrire la primitive correcte utilisée, et donner les bonnes valeurs de $\cos(\pi/2)$ et $\cos(0)$.

2. **a.** Cette question classique concernant la formule de récurrence des intégrales de Wallis a été en général entamée, mais aboutie uniquement par les bons candidats. L'intitulé de la question encourageait les candidats à calculer $W_k - W_{k+2}$ puis à choisir judicieusement les termes dans l'intégration par parties proposée. Les candidats les plus faibles ont regroupé les deux intégrales mais n'ont pas su quoi en faire.
   Une grande majorité des candidats, qui connaissaient déjà les intégrales de Wallis, sont naturellement partis de W_{k+2} et ont montré par intégration par parties que $W_{k+2} = (k+1)(W_k - W_{k+2})$, ce qui permettait bien d'aboutir au résultat.
   Pour les candidats qui l'ont effectuée, la technique de l'intégration par parties est bien assimilée. L'erreur la plus fréquente était de dériver incorrectement la fonction $x \mapsto \sin^k(x)$.

   b. Question bien traitée dans l'ensemble. Il était attendu des candidats soit un raisonnement par récurrence, soit un raisonnement par itérations successives. Dans ce dernier cas, la rédaction même si limitée doit impérativement faire apparaître l'itération clairement pour être évaluée pleinement, à savoir par exemple les deux premières itérations et le dernier terme.
   Sur ce type de question, on ne peut que regretter le nombre de copies malhonnêtes qui manipulent les indices de manière incorrecte et parviennent miraculeusement au résultat escompté. Sur une question aussi proche du début du sujet, il est attendu des candidats un soin certain sur leur rédaction.

Partie II : Étude de la fonction I

3. Les candidats ont clairement mal identifié la méthode attendue dans cette question. Les concepteurs attendaient plutôt des candidats qu'ils utilisent le changement de variable dans l'intégrale impropre pour justifier de la convergence de la première intégrale, comme cela est formulé dans le théorème au programme avec comme argument « les intégrales sont de même nature » (l'intégrale obtenue après changement de variable étant W_k, quant à elle, est bien définie).

   La plupart des candidats se sont empressés de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ en détail, puis de faire le changement de variable, ce qui était donc inutile ici vu l'intitulé de la question.

   Pour les candidats ayant fait ce type de raisonnement, la preuve de la convergence a été généralement mal faite et des points ont alors été perdus (inutilement). On peut mentionner que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ n'est pas une des intégrales « de Riemann » identifiées par le programme, contrairement à ce qu'affirmaient un nombre non négligeable de candidats.
   Le changement de variable est finalement bien réalisé de manière formelle par la plupart des candidats, mais très peu savent justifier sa validité correctement avec les attendus de rédaction du programme (avec appel d'une fonction clairement identifiée de classe C^1, strictement monotone, bijective entre deux intervalles à faire apparaître).

4. a. La convergence de l'intégrale $I(x)$ est rarement faite, car les candidats ne comprennent pas en général ce qui est attendu dans ce genre de question. La parité a été réalisée par presque l'ensemble des candidats.
   b. L'erreur la plus fréquente a été de répondre W_0 au lieu de $2W_0$, sans doute par ceux qui lisent trop rapidement l'énoncé.

5. a. Lorsque l'énoncé demande ainsi d'utiliser clairement l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction donnée et un ordre fixé, il est attendu des candidats qu'ils écrivent correctement la formule exacte du cours (en notant par exemple la fonction f) puis qu'ils substituent correctement les termes variables, à savoir les dérivées successives de la fonction f et la borne supérieure dans le terme de droite.
   L'inégalité est souvent donnée de façon incomplète, que ce soit du côté gauche ou du côté droit de l'inégalité, ce qui témoigne d'un apprentissage pas assez approfondi du cours. La plus grande difficulté était ici de majorer $|f^{(2n+1)}|$ sur le segment $[0, x, t]$.
   Encore une fois, les candidats tentent souvent de court-circuiter les raisonnements pour arriver aux résultats du sujet par des étapes trop rapides voire malhonnêtes.
   b. Cette question se déroule en deux étapes, qui doivent clairement apparaître sur la copie, quelque soit l'ordre dans lequel elles sont réalisées. D'une part l'intégration de l'inégalité précédente (après avoir divisé par $\sqrt{1-t^2}$), d'autre part la bonne gestion de la valeur absolue via l'inégalité triangulaire.
   c. Cette question de synthèse a en général été bien traitée.

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6. Cette question a été traitée correctement par une grande majorité de candidats.

7. a. Autant l'inégalité de gauche est presque immédiate, autant celle de droite a été mal faite. Les candidats tentent en général une étude de fonction, mais manquent de rigueur dans leurs calculs et concluent donc en général trop rapidement. Très peu de candidats ont su mener à bien leurs raisonnements.
   b. Lorsqu'un changement de variable affine est donné par le sujet, il n'est pas attendu des candidats qu'ils justifient sa validité (à l'inverse de la question **Pb1.II.3.**).
   Le raisonnement a été bien effectué dans la plupart des copies.
   c. Cette question a été rarement abordée, alors qu'elle ne présente pas de difficulté réelle. Pour obtenir la totalité des questions, il fallait mentionner ici que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}du$, apparaissant pour la première fois dans cette question, était bien convergente avec un argument rapide.

8. a. Un nombre encore trop grand de candidats ne sait pas répondre à la première partie de la question, qui relève uniquement d'une connaissance du cours. Les candidats mentionnant une densité nulle sur $\mathbb{R}^-$ et avec une expression sur $\mathbb{R}^+$ sont lourdement sanctionnés, de même pour les candidats qui pensent donner une densité en écrivant l'intégrale d'une fonction...
La principale erreur sinon fut de confondre la variance et l'écart-type, ce qui conduisait à une erreur dans la densité d'un facteur multiplicatif constant.
Dans ce cas (et uniquement dans ce cas), la fin de la question était jugée relativement à cette erreur, le raisonnement pour mettre en place les valeurs des intégrales étant indépendant des valeurs effectives, le résultat n'étant pas donné ici.

b. Peu de copies abordent cette question. Là encore, les copies ayant des valeurs erronées dans la question **8.a.** et aboutissant cependant miraculeusement au résultat proposé ont été sanctionnées.

9. Question peu abordée. On attendait un argument clair, d'une part pour combiner les inégalités des questions **6.** et **7.c.**, d'autre part pour justifier clairement de l'équivalent dans le membre de droite. Pour une question de ce type, de synthèse en fin de partie, les correcteurs peuvent être indulgents si la rédaction est concise par exemple en utilisant un « théorème d'encadrement sur les équivalents », même si un argument de ce type n'est nullement au programme explicitement.

Partie IV : Une application

10. a. Comme mentionné dans les remarques générales du sujet, cette question d'informatique est globalement peu abordée, trop peu relativement au nombre de points volontairement mis en jeu dans le barème. Le travail du langage Scilab est très bien pondéré au concours, donc nous encourageons vivement les candidats à s'investir davantage durant leurs années de CPGE en informatique, car la résolution d'une question Scilab est équivalente en poids à celui de deux questions jugées difficiles dans le problème, alors même que la résolution des questions d'informatique reste assez aisée pour tout candidat relativement sérieux et ayant retenu l'essentiel des enseignements au programme.
Il est d'ailleurs étonnant que l'absence de réponses soit également présente dans les très bonnes copies !
Lorsque le sujet demande d'écrire entièrement une fonction Scilab, sans que le sujet en comporte un exemple, les correcteurs seront très indulgents sur toute écriture de type syntaxique (écriture hasardeuse du préambule, mauvaise gestion de la ponctuation éventuelle, ...).
Dans ce type de question, les compétences attendues dans les copies sont les suivantes :

* prendre en compte correctement le « grand nombre de fois » à simuler les variables (soit par une valeur grande fixée au choix du candidat telle que 10000, soit en insérant un `input` demandant à l'utilisateur de choisir cette valeur) ;
* écrire correctement la simulation des variables aléatoires, soit par une boule `for`, soit en calculant directement une matrice de type `grand(10000,2,' poi' ,lambda)` ce qui est bien entendu accepté également ;
* comprendre qu'on obtient une estimation de $\mathbf{P}([X = Y])$ en prenant la fréquence empirique de l'événement.

Certains candidats à l'aise avec les fonctionnalités de Scilab utilisent directement des fonctions telles que `find` pour rechercher dans leur matrice le nombre de fois où deux variables sont égales, ce type de raisonnement est tout autant accepté puisque c'est l'esprit même du programme d'informatique d'ECS que de savoir utiliser Scilab de manière judicieuse et autonome.

b. À la surprise des correcteurs, beaucoup de candidats lisent mal l'énoncé. On a donc lu dans de nombreux cas que : $\mathbf{P}([X = Y]) \sim 0,5$.

11. Cette question classique a été bien résolue par tous les candidats qui l'ont abordée.

12. **a.** Certains candidats trop rapides remplacent les résultats de la question **5.c.** avec des erreurs, oubliant par exemple les constantes multiplicatives.

b. Il est dommage que certains candidats ayant trouvé quelque chose de faux à la question **10.b.** ne le mentionnent pas ici au vu de leur résultat. Les correcteurs aimeraient que les candidats fassent ici preuve de recul lorsqu'un sujet leur permet de montrer un résultat qu'ils ont conjecturé au préalable grâce à l'informatique.

5 Analyse en détail du Problème 2

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. **a.** Cette question facile a été bien traitée par la quasi-totalité des candidats.

b. Même remarque. Il est dommage que certains candidats ne songent pas à simplifier le résultat, on attendait ici d'aller au bout des simplifications pour obtenir que $\varphi(X^n) = X^n$.

c. Cette question plus délicate a été mal résolue, les candidats éludant le problème ou ne voyant pas ce qui manquait à leur argument.
L'argument le plus clair et concis était ici de s'avancer un peu sur la question suivante, et de calculer l'image $\varphi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ pour justifier alors, par argument de linéarité (rarement présent), que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

2. Certains candidats se contentent à tort de donner les deux premières colonnes et la dernière colonne, alors qu'on attend clairement ici une expression générale des colonnes de A.
Un calcul clair de $\varphi(X^k)$ doit au moins alors être effectué à côté de façon apparente, ou bien la $(k+1)$-ième colonne de la matrice précisément écrite.
De même, la forme générale de la matrice (ici triangulaire inférieure) doit être clairement mise en évidence et visible sur la copie.
Les erreurs sur la sous-diagonale (finir par un 0 par exemple) sont tout autant sanctionnées.
Globalement, les candidats peuvent perdre des points inutilement sur ce genre de questions, tout simplement car ils manquent de soin. Écrire une matrice de taille $n+1$, au même titre que tracer une représentation graphique d'une fonction, doit être aussi clair que possible afin que toutes ses formes particulières sont clairement identifiées.
En ce qui concerne le rang, on attendait ici une réponse du type « taille de A moins un », même si la taille de la matrice A était fausse dans l'esprit du candidat (n à la place de $n+1$), mais une justification claire était requise pour obtenir tous les points. Les raisonnements décrits sont alors souvent hasardeux et peu convaincants.

3. **a.** Ici les candidats répondant « oui » à cause d'un résultat faux à la question précédente sont sanctionnés, vu l'intitulé des questions suivantes.

b. Cette question était sans doute la plus difficile du sujet 2018, car utilisant des raisonnements fins sur les polynômes, très peu de candidats en sont venus à bout. Sans doute cela permettra aux futurs candidats dans les lectures d'annales de se préparer à des questions pointues de ce type sur les racines complexes des polynômes et leur ordre de multiplicité.

La partie la plus abordable était de montrer que 1 était une racine de P, et beaucoup de candidats l'ont démontré correctement.
On attendait dans la suite de montrer que si P (dans le noyau) admettait une autre racine (complexe), alors l'ordre de multiplicité de cette racine devrait être le même dans P que dans P', ce qui est absurde. Ce genre de raisonnement, plus délicat, a été mené correctement par quelques rares excellents candidats que l'on peut bien entendu féliciter.
Certains candidats plus malins ont anticipé les questions suivantes, ont montré que $(1-X)^n$ (ou $(X-1)^n$) était un élément du noyau, donc obtenaient ainsi une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ vu la dimension connue dans la question **2.**, et donc ont simplement vérifié que les conditions étaient bien remplies pour tous les polynômes non nuls de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Les points ont bien entendu été accordés à ces copies, démontrant ainsi d'un recul certain face à la lecture du problème et la globalité du sujet.

c. Certains candidats ont admis le résultat de la question **3.b.** et su correctement répondre alors à cette question.

4. Cette question est en général correctement traitée dans les copies. Ici encore, les candidats affirmant que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n$ sont lourdement sanctionnés.

5. **a.** Beaucoup d'erreurs de calculs sont présentes, notamment dans le calcul de $(P_k)'$. On attendait ici une simplification des calculs pour obtenir tous les points à la question, à savoir parvenir à la relation : $\varphi(P_k) = \frac{k}{n}P_k$.

b. Même pour les candidats ayant réussi la question précédente, très peu ont pensé à faire le lien entre les polynômes P_k et le fait qu'on obtenait alors une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, donc nécessairement une famille libre, ce qui était le raisonnement naturel attendu ici.
Une large majorité de candidats, sans doute par automatisme vis-à-vis d'autres exercices, a justifié à tort la liberté de la famille $\mathcal{B}'$ en pensant que les polynômes P_k étaient tous de degrés distincts, ce qui est bien sûr faux.
Lorsque certains candidats s'essayaient à montrer la liberté en détail de la famille $\mathcal{B}'$, le raisonnement était entamé mais peu abouti.
Un nombre trop grand de candidat confond encore le vocabulaire associé aux familles de vecteurs, notamment pour les notions de cardinal d'un ensemble ou d'une liste, et celui relatif à la dimension d'un espace vectoriel. Les candidats confondent par exemple $Card(\mathcal{B}')$ et $\dim(\mathcal{B}')$, la deuxième notation n'ayant pas de sens à la lecture stricte des notions au programme.

c. Cette question est peu abordée car faisait la synthèse des questions précédentes qui n'avaient pas forcément été traitées.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

6. **a.** Cette question demandait déjà de bien lire l'énoncé pour comprendre l'expérience aléatoire et ce que signifiait Z_2.
Beaucoup de candidats se contentent de donner la loi sans justification ; on attend un minimum d'explication, ne serait-ce qu'une phrase pour vérifier que le candidat comprend ce qu'il fait, et qu'il ne recopie pas seulement le résultat de la question **6.c.**.
Cette question est cependant abordée par un grand nombre de candidats avec succès.

b. Les candidats qui ont bien compris l'expérience et la question précédente ont tout autant réussi cette question.

c. Il n'était pas attendu ici de démonstration de l'égalité que l'énoncé précisait de remarquer. Le choix des termes employés dans le sujet doit en principe indiquer au candidat lorsqu'on attend une démonstration ou une justification ; ici ce n'était pas le cas.
La question a ensuite été bien traitée par la plupart des candidats.

d. Seuls les bons candidats perçoivent qu'il était nécessaire de procéder par récurrence pour démontrer le résultat. Le plus simple était d'effectuer un raisonnement par récurrence forte, mais on peut tout aussi bien s'en sortir avec un raisonnement par récurrence simple avec la bonne hypothèse de récurrence.

e. Cette question est facile et immédiate pour les candidats qui combinent les questions **6.b.** et **6.d.**. Elle peut être plus laborieuse pour ceux qui essaient de combiner les questions **6.c.** et **6.d.**, mais tout autant possible.
Dans l'ensemble, quelle que soit la méthode, les candidats ayant abordé la question ont réussi à terminer leur calcul.

7. a. Beaucoup de candidats pensent que $G_0 = 0$, sans doute en oubliant que, par convention, on pose $0^0 = 1$. Les candidats s'étant trompés à la question **6.a.** sur la loi de Z_2, mais effectuant un raisonnement correct pour obtenir G_2 ont obtenu tous les points correspondants à ce calcul.

b. Pour une telle phrase à démontrer, le résultat étant de plus donné par l'énoncé, on attend plus qu'un simple commentaire des termes apparaissant dans l'expression.
Dans l'idéal, on attend un appel à la formule des probabilités totales, à l'aide d'un systemè complet d'événements judicieusement choisi, et une explication des produits apparaissant par application des probabilités conditionnelles. Au minimum, une explication détaillée montrant qu'on comprend qu'il y a incompatibilité entre deux situations qui s'écrivent chacune comme deux étapes successives. Il est parfois plus clair pour les candidats de tenter d'écrire mathématiquement leur raisonnement en formalisant les probabilités totales, plutôt que de se perdre dans une page entière d'explications plus ou moins approximatives.

c. Les candidats abordent peu cette question, mais ceux qui s'y attaquent le font avec succès. Les correcteurs sont alors indulgents, à ce point du sujet, sur la rigueur relative des gestions d'indices de sommation mises en jeu.

d. Cette question est bien traitée par la majorité des candidats l'abordant. À ce point du sujet, une réponse rapide, claire et concise peut suffire sans plus de détail.

8. a. Cette question classique, est bien résolue dans une bonne majorité de copies.

b. Peu de candidats abordent la question, sûrement par gestion du temps restant dans l'épreuve. C'est pourtant une simple application des questions **7.c.** et **8.a.**.

c. Deux types de réponses correctes peuvent convenir ici. Soit les candidats reconnaissent dans la question précédente l'expression d'une suite arithmético-géométrique et en déduisent alors la forme explicite de $\mathbf{E}(Y_k)$. Signalons que dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'écrire tous les détails, une explication concise de la méthode pour obtenir la forme explicite est suffisante.
On pouvait tout autant démontrer par récurrence le résultat de la question **6.e.** à l'aide de la relation montrée en **8.b.**.

9. a. Dans la plupart des copies, la formule du binôme de Newton a bien été reconnue et appliquée.

b. Il est étonnant qu'a contrario, dans cette question, les candidats aient plus de mal qu'à la question précédente pour appliquer la formule du binôme.

c. Cette question de synthèse a été rarement abordée par les candidats, sûrement par manque de temps ou par manque de recul face à toutes les questions précédentes.

Il y avait plusieurs points à mettre en place pour obtenir la totalité des points. On attendait déjà que les candidats écrivent G_0 à l'aide de la question **9.a.**, puis que les candidats utilisent clairement la linéarité de φ^k, puis qu'ils manipulent le fait que P_j était vecteur propre de φ en se référant à **5.a.** pour conclure.

d. Cette dernière question ne nécessitait que peu de connaissance, et faisait également guide de synthèse au problème. Il suffisait de procéder à l'identification des termes de coefficient X^i dans les deux expressions du polynôme G_k et la modification du produit $\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$, ce que certains candidats ont su bien mettre en œuvre même sans avoir fait les questions précédentes.