MATHÉMATIQUES I, session 2017

Option Scientifique

École conceptrice : EMLYON

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Le problème 1 porte sur l'algèbre : matrices, polynômes, endomorphismes, produits scalaires, endomorphismes symétriques.
Le problème 2 porte sur l'analyse et les probabilités : intégrales généralisées, fonctions, suites, limites, équivalents, séries, variables aléatoires à densité.

Problème 1

Le problème 1 est composé de quatre parties.

Partie I

La partie I propose l'étude d'une matrice carrée d'ordre trois.

Cette partie I, très facile, a été correctement traitée dans la majorité des copies.

1. Il faut remarquer que la matrice A est triangulaire supérieure.
Quelques candidat(e)s invoquent, à tort, une matrice triangulaire inférieure, une matrice diagonale.
Quelques réponses incohérentes.

2. Des candidat(e)s croient, à tort, que toute matrice triangulaire est diagonalisable.
Un contrexemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire et n'est pas diagonalisable.

3. Il s'agit ici de diagonaliser A.

La méthode est connue et les résultats obtenus sont corrects dans la majorité des copies.

Les consignes concernant les matrices D et P doivent impérativement être respectées.

Partie II

La partie II étudie un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, dont la matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure.

Cette partie II a été, dans l'ensemble, convenablement traitée.

4. La linéarité de T est en général bien faite.

Pour montrer que T est une application de E dans E, la considération des degrés est indispensable.

5. Question abordée et résolue correctement dans la grande majorité des copies.

Les correcteurs ont cependant quelquefois vu ici des matrices contenant la lettre X.

D'autre part, trop de candidat(e)s donnent n, au lieu de $n+1$, pour la taille de la matrice M.

6. Question en général résolue.

Le noyau de T doit être exprimé à l'aide de polynômes et non à l'aide de colonnes.

Ici aussi il y a quelquefois confusion entre n et $n+1$.

7. Question facile et souvent abordée.

Dans la quasi-totalité des copies, on se contente d'affirmer que les $k(k+1)$, pour $k \in \{0, ..., n\}$, sont deux à deux distincts, alors qu'il faut le démontrer.

Ici aussi il y a quelquefois confusion entre n et $n+1$.

Partie III

La partie III fait intervenir un produit scalaire et un endomorphisme symétrique, en liaison avec la partie II.

Les candidat(e)s ont, dans l'ensemble, abordé le début de cette partie III.

8. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont en général bien vues.

Mais les arguments pour le caractère défini sont trop souvent incomplets : il manque la continuité, ou la caractérisation de la nullité d'un polynôme par l'annulation en une infinité de points.

9. Question souvent résolue. Ne pas oublier de citer le caractère C^1.

10. La première partie de cette question est souvent abordée, mais les arguments donnés ne sont pas toujours les bons.

La seconde partie de la question est en général bien résolue.

11.a. Question facile, souvent traitée.

11.b. On retrouve les mêmes erreurs que lors de la résolution de la question 9 (caractère défini).

Partie IV

La partie IV revient sur le cas $n = 2$, en liaison avec la partie III, et amène un endomorphisme de carré donné.

Les candidat(e)s ont, dans l'ensemble, traité la première question de cette partie III, mais ont fait peu de choses ensuite.

12. Question très facile, traitée dans presque toutes les copies.

13. Question assez souvent abordée, mais avec des erreurs de compréhension ou de calcul.

Il y a souvent confusion entre la norme associée à φ et la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^3$, confusion entre la norme et le carré de la norme, confusion entre la norme et l'inverse de la norme.

Trop de candidat(e)s ne voient pas que la famille de trois polynômes obtenue à la question 3 est déjà orthogonale.

14. Question rarement abordée.

Des candidat(e)s confondent $V \circ V(P)$ et $\big(V(P)\big)^2$.

Problème 2

Le problème 2 est composé de quatre parties.

Partie I

La partie I étudie une fonction définie par une intégrale généralisée.

La plupart des candidat(e)s ont abordé cette partie I, mais avec trop d'insuffisances et d'erreurs.

1. Il y a quelquefois oubli de la continuité sur $[0\,;+\infty[$, ou oubli de la positivité lors de l'utilisation d'un théorème de comparaison.

Quelques candidat(e)s confondent les rôles de x et de t.

2. Trop de candidat(e)s confondent fonction d'une variable réelle et suite réelle, et comparent $H(x+1)$ et $H(x)$, ce qui ne résout pas la question posée.

D'autre part, on ne peut pas dériver sous le signe intégrale.

3.a. Question correctement résolue dans la majorité des copies.

La connaissance du cours sur la fonction Arctan est indispensable ici, ainsi que dans plusieurs questions ultérieures.

3.b. Pour la première partie de la question, la méthode consiste à effectuer une intégration par parties sur un segment $[0\,;A]$, puis à faire tendre A vers $+\infty$.

La seconde partie de la question est obtenue dans presque toutes les copies.

3.c. Cette question d'informatique est très facile et n'est cependant correctement traitée que dans une minorité de copies.

3.d. Question facile, mais trop de candidat(e)s s'enlisent dans les écritures et le résultat final est souvent balancé après des intermédiaires faux.

Partie II

La partie II étudie le comportement de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$, à l'aide d'un changement de variable puis d'un encadrement.

Cette partie II a été largement abordée, mais avec de nombreuses erreurs et lacunes.

4.a. De trop nombreux candidat(e)s confondent

- la fonction réciproque de φ, c'est-à-dire la fonction φ^{-1}, telle que $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$,
- la fonction inverse de φ, la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$ qui, à u, associe $\dfrac{1}{\varphi(u)}$, et qui est ici hors de propos.

Des candidat(e)s commettent une erreur grossière de dérivation, et dérivent la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u}$ en $u \longmapsto -\mathrm{e}^{u}$ (faux), au lieu de $u \longmapsto -\mathrm{e}^{-u}$ (exact).

4.b. Cette question n'est traitée correctement que dans une minorité de copies.

5.a. Question très facile, traitée dans la quasi-totalité des copies.

5.b. Le résultat se déduit de la question précédente, mais le calcul final des intégrales d'exponentielles n'est souvent pas fait ou n'est pas correct.

6. Il y a trop souvent confusion entre $2x-1$ et $\dfrac{1}{2x-1}$, et les correcteurs ont été étonnés de lire que la limite de $\dfrac{1}{2x-1}$, lorsque x tend vers $\dfrac{1}{2}$, est 0, alors que c'est, bien sûr, $+\infty$.

Partie III

La partie III étudie le comportement de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, en utilisant la relation de Chasles, une variable aléatoire à densité et des encadrements.

Moins nombreux sont les candidat(e)s qui étudient cette partie III, et ici aussi avec trop d'insuffisances, d'erreurs et d'imprécisions.

7.a. Beaucoup de blablas et d'erreurs, invoquant une convexité ou des développements limités.

La solution correcte consiste en l'étude des variations d'une fonction.

7.b. Les copies contiennent ici trop d'erreurs de calcul, par oubli d'une parité ou d'un coefficient.

Il y a quelquefois confusion entre variance et écart-type, ou confusion entre x et $\dfrac{1}{x}$.

7.c., d. Ces questions n'ont été abordées que dans une minorité de copies, et la résolution est alors correcte.

7.e. Question de synthèse, facile. Mais il y a trop souvent dans les copies confusion à propos des bornes des intégrales.

8.a. Question assez souvent abordée, mais le développement limité n'est pas poussé assez loin et peu de candidat(e)s obtiennent l'équivalent exact.

8.b. Il s'agit ici d'utiliser le lien entre la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ et la suite de terme général u_n, en faisant intervenir un télescopage sur une somme partielle.

8.c. Question peu souvent abordée, mais alors correctement traitée.

9. Cette question n'a quasiment jamais été abordée, et les justifications données sont alors souvent insuffisantes.

Partie IV

La partie IV étudie une suite de variables aléatoires.

Cette partie a été largement abordée dans la plupart des copies et de façon plutôt convenable.

10. Question facile, souvent traitée.

11.a. Question facile, lorsque l'on connaît le cours sur la fonction Arctan, et souvent traitée.

11.b. De même, cette question est souvent abordée, mais le calcul de primitive est quelquefois faux.

12.a. Question assez souvent abordée. Ne pas oublier de citer l'indépendance mutuelle au moment opportun.

Dans quelques copies, il y a confusion entre événement et probabilité.

12.b. La première partie de cette question est souvent traitée, de façon classique.

La second partie est moins souvent abordée.

12.c. Question assez facile, et cependant peu traitée.

12.d. Cette dernière question est rarement abordée, et la résolution est alors correcte.

L'équipe de conception s'est attachée à produire un sujet conforme au programme ECS, progressif dans la difficulté des questions, permettant aux candidat(e)s de valoriser leurs compétences : compréhension de la problématique, connaissance du cours, aptitude au raisonnement logique, mise en oeuvre des techniques de calcul, communication écrite et qualités de synthèse.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un excellent sujet, exempt d'erreur d'énoncé, de style classique, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, très rédigé, de difficulté graduée, couvrant une large partie des connaissances exigibles des deux années, très bien adapté à la voie scientifique, et de longueur bien calibrée.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions ouvertes ou plus délicates, aux meilleur(e)s de se dégager. L'aptitude au calcul et au raisonnement, les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

L'écart entre les très bonnes copies et les copies très faibles reste important. Les correcteurs ont trouvé le niveau des copies très hétérogène, mais pas en baisse. Les candidat(e)s non préparé(e)s n'ont pas pu donner le change : la quasi-totalité des questions exigeait la connaissance du cours. Certaines copies montrent que des candidat(e)s ont des difficultés à mobiliser des compétences mathématiques en principe développées depuis l'enseignement secondaire.

Le niveau global des copies est un peu plus élevé que lors des sessions précédentes.

La présentation des copies est satisfaisante, mais l'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision.

Une connaissance sûre et précise du cours et un entraînement assidu aux techniques classiques sont indispensables.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation doivent être respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats en les encadrant proprement, de séparer nettement les questions et de conclure clairement à la fin de chaque question. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué parfaitement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.

Moyenne de l'épreuve : **. / 20**.