BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : ESC DIJON Bourgogne

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 6 mai 2016, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. a) Calculer A^3. Vérifier que $A^3 = 4A$.
   b) En déduire que les valeurs propres que A peut avoir sont : 0, 2 et -2.
   c) On considère les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que X, Y et Z sont vecteurs propres de A. Quelles sont leurs valeurs propres associées ?
   d) Justifier, en utilisant les questions précédentes, que $AP = PD$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $A^n P = PD^n$.
   c) Donner D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

Tournez la page S.V.P.

3. On considère les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 4a_n - 6b_n + 2c_n \\ b_{n+1} & = & 2a_n - 4b_n + 2c_n \\ c_{n+1} & = & -2a_n + 2b_n \end{array}\right.$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = AU_n$.

b) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de a_{10} :

```
A=...
U=[0;1;2]
for i=1:10
    U=A*U
end
disp(...)
```

c) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = A^n U_0$.

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations : $a_n = -2^n$, $b_n = 0$ et $c_n = 2^n$.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par : $\forall x \in]-2, +\infty[, \quad f(x) = \ln(x+2) - x$
On nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Partie I - Etude de la fonction f

1. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par valeur supérieure. Comment interpréter graphiquement le résultat ?

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Calculer la dérivée de f. Dresser le tableau des variations de f sur $]-2, +\infty[$ en y faisant figurer les limites calculées en 1.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-1, +\infty[$.

   b) On donne : $\ln(2) \simeq 0,69$ et $\ln(3) \simeq 1,10$. Justifier que $\alpha \in]1, 2[$.

   On admet dans la suite que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution β entre -2 et -1.

4. Calculer la dérivée seconde de f. Montrer que f est concave sur $]-2, +\infty[$.

5. On donne $\alpha \simeq 1,15$ et $\beta \simeq -1,8$. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.

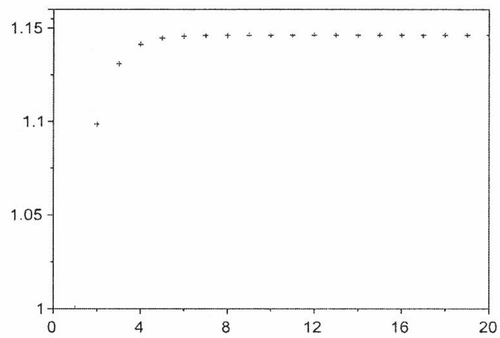
Partie II - Valeur approchée de α

Dans cette partie on cherche à justifier que $\alpha \simeq 1,15$. On considère la fonction g définie sur $[1, 2]$ par $g(x) = \ln(x+2)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il mémorise les valeurs de u_1 à u_{20} et qu'il représente graphiquement ces termes.

```
u(1)=...
for i=2:20
u(i)=....
end
plot([1:20],u,'+')
```

b) L'exécution du programme amène le graphique ci-contre.
Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sur sa limite ?



2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[1, 2]$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 \leq u_n \leq 2$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0,69$ et $\ln(3) \simeq 1,10$).
   c) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En déduire que cette suite est convergente.

3. a) Montrer que le réel α de la partie I est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $[1, 2]$.
   b) Soit l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = g(u_n)$ montrer que $l = g(l)$.
   c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α. Donner une valeur approchée de α à l'aide du graphique de la question 1.

Exercice 3

Soit N le nombre total de loups présents sur l'ensemble du massif alpin. On ne connaît pas la valeur de N et on cherche à l'estimer. Pour cela, on prélève 10 loups au hasard dans le massif, on leur pose à chacun une puce électronique puis on les relâche. Un mois plus tard, on reprend les prélèvements dans la population de loups selon deux protocoles différents. On suppose que dans l'intervalle la population de loups n'a pas changé c'est à dire qu'il n'y a eu ni décès ni naissance. On suppose également que chaque loup (pucé ou non) est prélevé de manière équiprobable.
La probabilité de prélever un loup pucé est donc $\dfrac{10}{N}$.

1. **Premier protocole**

   On prélève 30 loups au hasard et *avec remise* c'est à dire que chaque loup prélevé est relâché dans la nature entre deux prélèvements et peut donc être prélevé plusieurs fois.

   Soit X le nombre de loups pucés que l'on prélève.

   a) Reconnaître la loi de X. Donner $X(\Omega)$ ensemble des valeurs prises par X. Donner une expression de $P(X = k)$ pour tout entier k de $X(\Omega)$.
   b) Donner, en fonction de N, l'espérance et la variance de X.
   c) Montrer que $\dfrac{X}{300}$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{N}$. Quel est le risque quadratique ?

2. **Second protocole**

   On prélève au hasard et avec remise des loups dans le massif jusqu'à en trouver un qui soit pucé. On nomme Y_1 le nombre de loups prelevés lorsque l'on trouve le premier loup pucé.

   a) Reconnaître la loi de Y_1 décrire $Y_1(\Omega)$ et donner une expression de $P(Y_1 = k)$ pour tout entier $k \in Y_1(\Omega)$.
   b) Donner, en fonction de N, l'espérance de Y_1.

On continue les prélèvements avec remise jusqu'à obtenir pour la première fois 3 loups pucés. On note Y_2 le nombre de loups prélevés entre l'apparition du premier loup pucé et celle du deuxième et Y_3 le nombre de loups prélevés entre l'apparition du deuxième loup pucé et celle du troisième.

c) Expliquer pourquoi Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1.

d) Soit Y le nombre total de loups prélevés lorsque l'on prélève le troisième loup pucé. Exprimer Y en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. En déduire $E(Y)$.

e) Justifier que $\dfrac{10Y}{3}$ est un estimateur sans biais de N.

f) L'expérience est effectuée et l'on prélève exactement 33 loups avant d'obtenir le troisième loup pucé. A quelle valeur estimez-vous N ?

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 0$ si $t < 1$ et $f(t) = \dfrac{2}{t^3}$ si $t \geq 1$

1. a) On pose pour $A \geq 1$: $I(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{t^3}dt$. Montrer que $I(A) = 1 - \dfrac{1}{A^2}$.

   b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans une station service, si une pompe à essence est libre on appelle « durée de distribution » le temps en minutes nécessaire à un automobiliste pour se garer, faire le plein, payer et repartir. On suppose que la variable aléatoire X égale à la durée de distribution est de densité f.

2. Soit F la fonction de répartition de X. Calculer $F(x)$ pour $x < 1$. Montrer que si $x \geq 1$ alors $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

3. a) Calculer la probabilité que la durée de distribution soit d'au moins 2 minutes, la probabilité qu'elle soit de moins de 3 minutes et enfin la probabilité qu'elle soit comprise entre 2 et 3 minutes.

   b) On suppose qu'un client est à la pompe depuis déjà 2 minutes. Quelle est la probabilité qu'il reste encore moins d'une minute ?

4. a) Soit A un réel supérieur à 1. Calculer : $J(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{t^2}dt$ puis $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} J(A)$.

   b) En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.

On suppose que la station service dispose de deux pompes identiques. Trois clients arrivent en même temps à la station. Deux d'entre-eux commencent à se servir pendant que le troisième client doit attendre que l'un des deux premiers ait terminé.
On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux durées respectives de distribution pour le client n°1 et le client n°2. On admet que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et qu'elles ont f pour densité.
On note enfin Y la variable aléatoire égale au temps que le client n°3 doit attendre avant de pouvoir se servir en carburant. On admet que Y est une variable aléatoire à densité.

5. Pour tout réel x, justifier que $P(Y > x) = P([X_1 > x] \cap [X_2 > x])$ puis en déduire $P(Y > x)$ en fonction de F.

6. a) Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$G(x) = 0 \text{ si } x < 1 \text{ et } G(x) = 1 - \frac{1}{x^4} \text{ si } x \geq 1$$

   b) Déterminer une densité de Y.

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1179 – D'après documents fournis