BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Conception : E.S.C.P. / EUROPE

Code épreuve : 285

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 9 mai 2012, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante :
une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice d'ordre 3 définie par : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.

2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
   Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathcal{E}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$. Déterminer x, y, z, t en fonction de a, b, c, d, e pour que M soit une matrice de $\mathcal{E}$.

Tournez la page S.V.P.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

a) Calculer AJ et JA.

b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $AJ = JA$.

c) Vérifier que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

5. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.

b) Établir l'égalité : $s(AB) = s(A)s(B)$.

6. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

a) À l'aide de la question 4.b, montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.

b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.

7. Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose : $B = \frac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.

On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

a) Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.

b) Montrer que : $BC = CB = 0$ (matrice nulle).

c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la formule : $(A - B)^n = A^n - B^n$.

d) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?

e) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathcal{F}$.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$.

1. Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = (1+t)^{3/2}$.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b) En déduire la valeur de u_0.

2.a) Établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente ; donner sa limite.

3.a) Établir pour tout entier naturel n, à l'aide d'une intégration par parties, la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 (t^n + t^{n+1})\sqrt{1+t}\,dt$$

b) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante : $u_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5}$.

4.a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

b) En déduire pour tout entier naturel n, à l'aide de la question 3.b, l'inégalité suivante : $u_n \geqslant \dfrac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant \dfrac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.

d) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 3

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1,2,3 et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.

On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages.
On a donc $X_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent 2,2,1,2,1,4,3 alors on a :
$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 2,\ X_4 = 2,\ X_5 = 2,\ X_6 = 3,\ X_7 = 4$.

La probabilité d'un événement H est notée $P(H)$.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z sont notées respectivement $E(Z)$ et $V(Z)$.

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, U_n la matrice à 4 lignes et 1 colonne définie par : $U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \\ P([X_n = 4]) \end{pmatrix}$.

1.a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

b) Calculer $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

c) On note F la fonction de répartition de X_2. Tracer la courbe représentative de F.

2.a) Déterminer U_1.

b) Préciser l'ensemble des valeurs prises par X_n.

c) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante : $U_{n+1} = AU_n$.

3. On considère les quatre matrices V_1, V_2, V_3, V_4 à 4 lignes et 1 colonne, définies par :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Établir par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante :

$$U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$$

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n.

4.a) Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $E(X_n)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$. Commenter.

EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1.a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la fonction f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On note X_n une variable aléatoire admettant f_n comme densité et on désigne par F_n la fonction de répartition de X_n.

2.a) Vérifier que l'on a : $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

b) On considère l'équation $F_n(x) = \dfrac{1}{2}$. Montrer que cette équation admet une unique solution, notée M_n, que l'on calculera en fonction de n.

c) Étudier la convexité de la fonction F_n sur l'intervalle $[0, 1]$.

d) Tracer la courbe représentative de F_2 dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Placer le réel M_2 sur ce graphique.

3.a) On note $E(X_n)$ l'espérance de X_n. Montrer que $E(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

b) Calculer la variance $V(X_n)$ de X_n en fonction de n.

4. On pose : $Y_n = -\ln(1 - X_n)$, et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.
On note G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Exprimer pour tout x réel, $G_n(x)$ en fonction de x et de n.

b) Reconnaître la loi de Y_n.