1. EXERCICE.

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On considère une matrice S de $M_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles λ_1, $\lambda_2, \ldots,$ λ_n distinctes deux à deux.
L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S.
Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

1. Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale.
   Dans la suite de l'exercice un entier naturel impair k est fixé.

2. On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = (T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k))$$

   a. Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   b. En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1, U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

3. Prouver que le polynôme R, défini par :

$$R(X) = U(X^k) - X$$

   est un polynôme annulateur de D puis de S.

4. Soit une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.

   a. Montrer que pour tout entier naturel p,

$$AS^{pk} = S^{pk}A$$

   b. En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que :

$$AS = SA$$

5. On considère les deux matrices A et S de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

   b. Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

2. EXERCICE.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante :

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n \, dx \end{cases}$$

2.1. Etude de la bijection réciproque de f.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3. Justifier que :

$$\forall x \in J, \quad \begin{aligned} \cos(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) &= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J\setminus\{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J\setminus\{1\}, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

2.2. Etude des dérivées successives de f.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$
3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)X.P_n$$
En déduire le polynôme P_3.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

2.3. Etude de la suite d'intégrales.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.
2. Déterminer les réels a et b, tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}, \qquad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$$
3. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x}dx \geqslant \frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$$
En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}I_n$$

3. PROBLEME.

3.1. Etude d'une variable discrète d'univers image fini.

Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus n et m boules ($n \geqslant 1, m \geqslant 1$).
On s'intéresse au protocole suivant :
- On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0,1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1-p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules pour l'urne A ou contienne m boules pour l'urne B, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

3.1.1. Préliminaires.

On définit la suite de terme général a_n par :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}C_{2n}^n}{4^n} \quad n \geqslant 1$$

1. Calculer a_1 et, pour tout entier $n \geqslant 1$, le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

3. Donner le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel l tel que :

$$\frac{1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On admet que $l = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3.1.2. Etude de cas particuliers.

Dans cette partie seulement $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.
On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

1. Donner les lois de R_1, R_2 et R_3. Justifier vos calculs.

2. Calculer l'espérance et la variance de R_1, R_2 et R_3.

Dans toute la suite du problème $n \geqslant 2$.

3. Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?

4. Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.

   a. Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)^{ème}$ tirage l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.

   b. Donner alors la probabilité $p\left([R_n = k]\right)$.

5. Vérifier que :

$$\forall\ k\ \in \{0, 1, \ldots, n-2\}, \qquad 2(k+1)p\left([R_n = k+1]\right) = (n+k)p\left([R_n = k]\right)$$

6. Par sommation de la relation qui précède, en déduire que :

$$E(R_n) = n - (2n-1)p\left([R_n = n-1]\right)$$

7. Donner alors un équivalent de $n - E(R_n)$ quand n tend vers plus l'infini.

8. De façon analogue, montrer que :

$$E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$$

9. En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $E(R_n)$.

10. Ecrire un algorithme, en langage Pascal, permettant de calculer l'espérance de R_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

3.1.3. Retour au cas général.

On abandonne les conditions $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1. En utilisant un argument probabiliste, montrer que :

$$(1) : \quad q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k C_{m-1+k}^{m-1} + p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k C_{n-1+k}^{n-1} = 1$$

2. On pose $u_m = \sum_{k=0}^{m-1} q^k C_{n-1+k}^{\,n-1}$

   a. Etudier le sens de variation de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et donner à l'aide de la relation (1) un majorant de u_m ne dépendant pas de m.
   Etablir alors la convergence de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$.

   b. Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, donner un équivalent de $C_{m-1+k}^{\,m-1}$ lorsque m tend vers $+\infty$.

   c. En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{m\to+\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k C_{m-1+k}^{\,m-1}$$

   d. Prouver alors que :

$$\lim_{m\to+\infty} u_m = \frac{1}{p^n}$$

3.2. Etude d'une variable discrète d'univers image infini.

Dans cette dernière partie l'urne B, initialement vide, a une capacité illimitée et l'urne A, initialement vide, peut contenir au plus n boules ($n \geqslant 1$).
On s'intéresse au protocole suivant :
- On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0, 1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'urne A soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules, les choix successifs des urnes étant mutuellement indépendants.
On note alors T_n le nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne B et $(Z_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$, les variables aléatoires définies de la façon suivante :
- Z_1 compte le nombre de boules mises dans B avant de mettre la première boule dans A.
- Pour tout entier j de $\{2, \ldots, n\}$, Z_j compte le nombre de boules mises dans B entre la $(j-1)$ ème boule et la j ème boule mises dans A.
On admet que T_n est une variable aléatoire.

1. Quel est l'ensemble $T_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_n ?

2. Pour tout entier naturel k appartenant à $T_n(\Omega)$, donner la valeur de $p([T_n = k])$.

3. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\left([T_n = k]\right) = 1$$

4. Pour tout entier j de $\{1, \ldots, n\}$, donner la loi, l'espérance, la variance de Z_j.

5. Exprimer T_n en fonction des variables $(Z_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et de l'entier n.

6. En déduire l'espérance et la variance de la variable T_n.