BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

CONCOURS D'ADMISSION DE 2014

Conception : ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

MATHÉMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Mardi 6 mai 2014, de 8 h à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On rappelle que la fonction Γ (gamma) est la fonction, qui à tout réel x strictement positif, associe $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$. On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1) On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite.
On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$.

a) Montrer que la loi commune à U et V est la loi $\Gamma(2, \dfrac{1}{2})$.

b) Donner l'espérance et la variance de U et V.

2) On pose $W = U + V$ et on rappelle que W est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul la loi de W ainsi que son espérance et sa variance.

b) On admet que, si f_U et f_V sont respectivement des densités de U et V, alors, une densité de W est la fonction f_W, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt$.

Justifier, sans calculer l'intégrale précédente, que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_W(x) = \int_0^x f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt$$

c) Pour tout réel x strictement positif, on pose $I(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt$.

Déduire des questions précédentes que l'intégrale $I(x)$ converge et donner sa valeur.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$).
3) a) Établir que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)\ f(M)$.
   b) Donner les valeurs propres possibles de f.
4) Montrer que 0 est valeur propre de f.
5) Montrer que, si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
6) On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
   a) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?
   b) Conclure que f est diagonalisable.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur (par deux méthodes différentes) de :

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\, dt$$

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux polynômes 1 et X.

1) a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge.

   b) Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) d'éléments de E, associe $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$ est un produit scalaire sur E, dont la norme associée sera notée $\|\ \|$.

2) Soit Q un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels. Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\|X^3 - Q\|^2$.

3) a) Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\|X^3 - Q\|^2$ minimale.

   b) En déduire sans calcul les valeurs de $\langle X^3 - Q_0, 1\rangle$ et $\langle X^3 - Q_0, X\rangle$.

   c) En notant $Q_0 = x_0X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple (x_0, y_0) pour que $\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$ soit minimale.

   d) Déterminer la valeur de Δ.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$$

4) Écrire $f(x,y)$ comme une fonction polynomiale des deux variables x et y.
5) Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
6) Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local m que l'on calculera.
7) Établir que ce minimum est global.

Problème

Question préliminaire

1) Soit x un réel quelconque.

   a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)\,dt$.

   b) Montrer que : $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega),t)\,dt$$

On se propose dans les deux parties suivantes de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

   a) Déterminer la valeur de $P(X=0)$.

   b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

   c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Var u : integer ;
Begin
u : = random(4) ;
If ------ then ------ else y : = ------ ;
End ;
```

4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

   a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*$ puis donner la loi de Y.

   b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

On note, sauf indication contraire, respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.

   a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

   b) En déduire $Y(\Omega)$.

   c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

   d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

Tournez la page S.V.P.

e) Donner la valeur de $E(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Begin  y : = ------ ;  End ;
```

6) On suppose, dans cette question, que $X-1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

a) Toujours en utilisant la première question, exprimer Y en fonction de X.

b) Donner sans calcul l'espérance et la variance de Y.

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Vérifier que la variable aléatoire $W=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Begin y : = ------ ;
End ;
```

7) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega)=\mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega)=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left([X\leq 0],[0<X\leq 1],[X>1]\right)$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\dfrac{1}{2}\\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\\ \Phi(x) \text{ si } x>1\end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

e) Soit $U_1,\ldots,U_{48}$ des variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{48}U_k-24\right)$ par la loi normale centrée réduite, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Var k : integer ;  aux : real ;
Begin
aux : = 0 ;
For k : = 1 to 48 do aux : = aux + random ;
x : = (aux−24)/2 ;
If ------  then  y : = ------  else
                              If ------ then  y : = ------  else  y : = ------ ;
End ;
```


IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1241 – D'après documents fournis