



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

297

EDHECMATS

ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

**MATHÉMATIQUES**

Option scientifique

Lundi 4 mai 2009 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

### Exercice 1

• On admet que si une suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires converge en probabilité, alors la limite de cette suite est une variable aléatoire presque sûrement unique.

Plus précisément, si l'on a  $T_n \xrightarrow{P} T$  et  $T_n \xrightarrow{P} T'$ , alors  $P(T = T') = 1$ .

• On dit qu'une suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires converge en moyenne vers une variable aléatoire  $U$  si et seulement si : pour tout entier naturel  $n$ , la variable aléatoire  $|U_n - U|$  possède une espérance et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|U_n - U|) = 0$ .

• On rappelle l'inégalité de Markov, valable pour une variable  $V$  à valeurs positives et possédant une espérance mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, P(V > \varepsilon) \leq \frac{E(V)}{\varepsilon}.$$

1) Dans cette question, on considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et une variable aléatoire  $X$ , elle aussi définie sur cet espace probabilisé.

Montrer que, si la suite  $(X_n)$  converge en moyenne vers  $X$ , alors elle converge en probabilité vers  $X$ .

On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.

Pour ce faire, on considère une suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  (avec  $\lambda > 1$ ).

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $Y_n = \prod_{k=1}^n Z_k$ .

- 2) a) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, déterminer  $P(Y_n \neq 0)$ .
  - b) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Comparer les événements  $(Y_n > \varepsilon)$  et  $(Y_n \neq 0)$ .
  - c) En déduire que la suite  $(Y_n)$  converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.
- 3) a) Montrer que, si la suite  $(Y_n)$  convergeait en moyenne vers une variable aléatoire  $Y$ , alors on aurait  $P(Y=0) = 1$ .
  - b) Calculer l'espérance de  $Y_n$ .
  - c) Établir que  $E(|Y_n - Y|) \geq E(Y_n) - E(Y)$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|Y_n - Y|)$ .
- 4) Conclure.

## Exercice 2

On désigne par  $\alpha$  un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira  $u_n$  au lieu de  $u_n(\alpha)$ .

- 1) a) Vérifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , le réel  $u_n$  est bien défini et que  $u_n > 0$ .
  - b) Étudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  et en conclure qu'elle converge.
- 2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$ .
  - b) En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{k\alpha})$ .
- 3) Montrer, en considérant  $\ln(u_n)$ , que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- 4) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .
  - a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$ .
  - b) En déduire que :  $\forall n \geq 2, \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^n \left[ \ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \right]$ .
  - c) À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en  $\frac{1}{k}$ , donner un équivalent, lorsque  $k$  est au voisinage de  $+\infty$ , de  $\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$ .
  - d) Conclure quant à la nature de la série de terme général  $u_n$ .
- 5) Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 2$ .  
Compléter la déclaration de fonction récursive, ci-dessous écrite en Pascal, afin qu'elle retourne la valeur de  $u_n$  :

```

Function u(n : integer) : real ;
Begin
If (n = 1) then u := -----
else u := ----- ;
end ;
  
```

### Exercice 3

On note  $E$  l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à  $2n+1$ .

Pour tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, 2n+1\}$ , on admet que l'expression  $X^{2n+1} \times \frac{1}{X^k}$  désigne le polynôme  $X^{2n+1-k}$ .

On désigne par  $Id$  l'endomorphisme identique de  $E$  et on note  $f$  l'application qui à toute fonction  $P$  de  $E$  associe la fonction  $f(P)$  définie par :  $f(P) = X^{2n+1}P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) a) Vérifier que  $f \circ f = Id$ .

b) En déduire les deux valeurs propres possibles de  $f$ .

3) Soit  $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$  un polynôme quelconque de  $\text{Ker}(f-Id)$ .

a) Montrer que les  $a_k$  ( $0 \leq k \leq 2n+1$ ) sont solutions du système :  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, a_k = a_{2n+1-k}$ .

b) En déduire une base de  $\text{Ker}(f-Id)$ .

4) Déterminer de la même façon une base de  $\text{Ker}(f+Id)$ .

5) On considère l'application  $\varphi$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout couple  $(P, Q)$  de polynômes de  $E$  associe

le réel  $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$ , où l'on a noté  $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire défini sur  $E$ .

b) Établir alors que  $f$  est un endomorphisme symétrique

c) En déduire que  $\text{Ker}(f+Id)$  et  $\text{Ker}(f-Id)$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $E$ .

### Problème

#### Partie 1 : préliminaire

Dans cette partie,  $x$  désigne un réel élément de  $[0, 1[$ .

1) a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et pour tout  $t$  de  $[0, x]$ , simplifier la somme  $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$ .

b) En déduire que :  $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ .

d) Établir alors que la série de terme général  $\frac{x^p}{p}$  est convergente et que  $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$ .

2) a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , montrer

que la série de terme général  $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$  est convergente.

b) Utiliser la première question pour établir que :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$ .

## Partie 2

On considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$ , nulle sur  $]-\infty, 0[$ , continue sur  $[0, +\infty[$  et strictement positive sur  $[0, +\infty[$ . On note alors  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

1) Justifier que, pour tout réel  $x$ , on a :  $1 - F(x) > 0$ .

On définit alors la fonction  $g$  par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) \ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

2) Montrer que  $g$  peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire  $Y$ .

3) Étude d'un cas particulier.

a) Montrer qu'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.

b) On suppose ici que  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Reconnaitre alors la loi de  $Y$  puis donner son espérance et sa variance.

## Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  toutes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que  $X$  (c'est-à-dire de densité  $f$ , nulle sur  $]-\infty, 0[$ , continue sur  $[0, +\infty[$ , strictement positive sur  $[0, +\infty[$ , et de fonction de répartition notée  $F$ ).

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire  $Z$  ayant comme densité la fonction  $g$ , nulle sur  $]-\infty, 0[$ , et définie pour tout réel  $x$  positif par :  $g(x) = -f(x) \ln(1 - F(x))$ .

Pour ce faire, on considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de nombre réels positifs, définie par  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

1) Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$ .

On considère dès lors une variable aléatoire  $N$ , définie elle aussi sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendante des variables  $X_i$ , et dont la loi est donnée par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ .

On pose alors  $Z = \text{Sup}(X_0, X_1, \dots, X_N)$ , ce qui signifie que :

$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \text{Max}(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega))$ .

2) a) Montrer que  $Z$  est une variable aléatoire, elle aussi définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , et que sa fonction de répartition  $F_Z$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

b) Utiliser le préliminaire pour en déduire, à l'aide de la fonction  $F$ , une expression explicite de  $F_Z$  sur  $[0, +\infty[$ .

c) Vérifier que  $Z$  est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction  $g$  comme fonction densité.