Concours **EDHEC** **2010**

Classes Préparatoires

MATHEMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant une place importante aux probabilités (premier exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet sélectif, d'un niveau abordable, mais laissant encore plus d'initiative aux candidats que par le passé. Il a permis de bien apprécier les connaissances et les capacités à raisonner des candidats, ce qui est le premier but d'un texte de concours.

• L'exercice 1 proposait l'étude d'une fonction de n variables réelles dont l'étude locale en les points critiques ne permettait pas de conclure à la présence d'un extremum, mais pour laquelle l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantissait la présence d'un minimum global.

• L'exercice 2 étudiait une famille (f_λ) d'endomorphismes définis sur un espace vectoriel et dont les sous-espaces propres étaient supplémentaires orthogonaux.

• L'exercice 3 avait pour but de déterminer la loi de $| X - Y |$, où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, a[$, puis de donner une simulation informatique de cette loi.

• Le problème, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif d'étudier la notion de convergence complète d'une suite de variables aléatoires indépendantes définie de la façon suivante : la suite (X_n) converge complètement vers X, c'est-à-dire que, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(|X_n - X | \geq \varepsilon)$ est convergente.
Un exemple prouvait que la convergence complète implique la convergence en probabilités et un autre prouvait que la réciproque est fausse.
La fin du problème proposait l'étude d'une suite de variables aléatoires qui convergeait complètement et en probabilités.

Statistiques :
Pour l'ensemble des 3958 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,87 sur 20 et l'écart type vaut 5,8.
35 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (15 % ayant une note inférieure à 4).
22 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.
25 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Analyse des copies :
L'exercice 1 a révélé que peu de candidats sont vraiment bien préparés aux notions du programme vues vers la fin de l'année.

L'exercice 2 a révélé qu'en algèbre linéaire ou bilinéaire, les candidats savent, en majorité, traiter les questions classiques, mais sont capables de commettre des fautes quasi impardonnables, comme confondre $(f_\lambda)^2(x)$ avec $(f_\lambda(x))^2$, cette dernière expression n'ayant aucun sens dans cet exercice.

L'exercice 3 montre que beaucoup de candidats maîtrisent mal le produit de convolution de deux variables à densité indépendantes (ce qui est une notion, il est vrai, un peu technique, mais il a surtout révélé d'énormes problèmes, chez certains candidats, avec la manipulation des valeurs absolues, ce qui est plus étrange à ce niveau-ci.

Le problème a montré qu'un nombre assez important de candidats sont capables de travailler avec des notions nouvelles (ici, la convergence complète) et savent utiliser leurs connaissances de façon intelligente. A contrario, ce problème a aussi révélé que certains autres candidats manquent de maturité et sont prêts à écrire n'importe quoi pour conclure.
Les copies sont en grande majorité honnêtes, les candidats précisant clairement qu'ils admettent le résultat d'une question non traitée.
Cela dit, il faut noter cette année encore que certaines copies sont mal présentées : résultats mal mis en valeur (ni encadrés, ni même soulignés), numérotation des questions non respectée, etc.
Comme l'année dernière, les correcteurs ont constaté que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, certains candidats sont prêts à tout pour faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé, y compris à l'aide d'une suite de calculs parfois aberrants ! Qu'ils sachent que ceci est sanctionné très sévèrement et qu'aucun correcteur n'est dupe.
Certains correcteurs demandent donc s'il est possible d'établir un malus qui serait attribué aux copies mal présentées et/ou malhonnêtes : la question est à l'étude.

Voici une liste des quelques fautes, omissions et imprécisions les plus fréquentes (chacune d'entre elles ayant été trouvée sur un nombre significatif de copies) commises cette année :

Exercice 1
• Une définition mal comprise : l'inégalité « $\forall (x_1, x_2) \in]0,+\infty[^2,\ f(x_1, x_2) \geq 4$ » ne prouve pas que la fonction f possède un minimum global égal à 4 sur $]0,+\infty[^2$, mais seulement que 4 est un minorant de f sur $]0,+\infty[^2$.
• Il n'est pas question d'affirmer que, comme $J_n\, v_n = n\, v_n$, alors le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est $\mathrm{vect}(v_n)$.
• Trop de candidats semblent ne pas être en mesure de prouver que : $(x_1 + x_2)^2 \geq 4\, x_1 x_2$…

• Le scandale : écrire que $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n$ est quasi indigne à ce niveau.

Exercice 2.
• Il n'est vraiment pas bien de confondre $f_\lambda^{\ 2}(x)$ avec $\left(f_\lambda(x)\right)^2$.
• De très nombreux candidats pensent que le carré scalaire d'un vecteur u est égal à sa norme.
• Un nombre non négligeable de candidats ne savent pas ce qu'est un endomorphisme symétrique.
• Il n'est pas question de se contenter de vérifier que, pour tout x de l'espace E, $f_{-1}(x)$ appartient à $\left(Vect(u)\right)^\perp$ pour affirmer que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $\left(Vect(u)\right)^\perp$.
• Un autre scandale : le produit scalaire, noté $(x\ /\ y)$ se transforme en $x\ /\ y$, qui devient ensuite le quotient du vecteur x par le vecteur y !
• Mieux encore : de nombreux candidats pensent que, puisque x et u sont des vecteurs de E, alors leur produit scalaire est aussi un vecteur de E.

Exercice 3
• Il n'est vraiment pas bien de trouver une densité négative, sans signaler que l'on s'est très certainement trompé !
• Il n'est pas correct d'annoncer que l'on ne dérive que là où c'est possible, puis de dériver partout !
• Certains correcteurs semblent ne pas apprécier le "lemme des coalitions", ainsi que les "réserves de convergence" qui ne sont jamais levées, sans parler du "théorème de Haar" pour désigner la formule de convolution, et enfin "l'isotonie de la probabilité" pour désigner ce que l'on appelle (certes improprement) la croissance de la probabilité.

Problème
• Trop de candidats oublient de justifier les étapes permettant de transformer une inégalité.
• Il faut absolument éviter d'affirmer que $P(Y_n \geq 1) = 1$ car Y_n suit une loi de Poisson : apprendre son cours est la première chose à faire.
• Le must que l'on ne s'attendait pas à croiser, mais que l'on a vu sur un certain nombre de copies cette année : « la variable S_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes donc elle suit une loi binomiale » : le problème était que ces variables de Bernoulli n'avaient pas le même paramètre !
• Il n'est pas nécessaire que les variables B_k soient indépendantes pour écrire l'égalité suivante : $E(\sum_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} E(B_k)$. Elle résulte de la linéarité d'espérance.

Conclusion :
Le niveau moyen est en augmentation par rapport à l'année dernière : le nombre de copies faibles (note inférieure à 8) est en diminution de 3 % par rapport à l'année dernière et le nombre de très bonnes copies (note supérieure à 16) est en augmentation de 4 % par rapport à l'année dernière.
Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.