ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

LUNDI 10 MAI 1999, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de deux exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

Exercice 1

Partie A : étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1+x^2)$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que f est une fonction paire.

2. Etudier les variations de f et préciser sa limite en $+\infty$.

3. Montrer que $f(x)$ est équivalent à $2\ln x$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

4. Etudier la concavité de $\mathcal{C}$ et calculer les coordonnées des points d'inflexion.

5. Construire $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes à l'abscisse 0 et aux points d'inflexion. On donne $\ln 2 \simeq 0,7$.

Partie B : étude d'une intégrale.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx$.

1. Calculer I_0 .

2. (a) Calculer $I_0 + I_1$.
   (b) En déduire I_1 .

3. (a) Quel est le signe de I_n ?
   (b) Montrer que : $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+2}$.
   (c) En déduire que : $I_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$.
   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie C : étude d'une série.

1. (a) Montrer par récurrence que :
   $$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } 2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\ .$$
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx\ .$$

(b) Etablir les inégalités : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{2n+4}$.

(c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} nI_n$.

3. A l'aide des questions précédentes, donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Partie A : calcul matriciel.

On considère les matrices de $M_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que $A^2 = aA + bI$.
   (c) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.

2. (a) Calculer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable?
   (b) Déterminer les sous–espaces propres de A.
   (c) En déduire une matrice inversible P de $M_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

3. (a) Montrer que : pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) En déduire l'expression de la matrice M^n où $M = \frac{1}{6}A$.

Partie B : probabilités.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.
Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.

On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante :

- on lance la pièce
- si l'on obtient pile on tire une boule de U_1, sinon on tire une boule de U_2
- si la boule tirée est noire elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve la boule blanche à l'issue de n répétitions de $\mathcal{E}$.

I) Dans cette question on effectue une seule fois $\mathcal{E}$.

1. La notation PB_1 signifiant : "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1" (on l'a donc remise dans U_2), calculer la probabilité de l'événement $\{PB_1\}$.

2. En utilisant la même notation, décrire les résultats possibles de $\mathcal{E}$.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_1.

4. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

II) On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.

1. (a) Vérifier que : $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = \dfrac{5}{6}$ et $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = \dfrac{1}{6}$.
   (b) Calculer également $P(X_{n+1} = 2 | X_n = i)$ pour $i = 1$ et pour $i = 2$.
   (c) En déduire $P(X_{n+1} = 1)$ puis $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

2. On pose $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $V_{n+1} = MV_n$ où M est la matrice définie dans la **Partie A** en 3.(b).
   (b) Montrer alors que : pour tout n entier naturel non nul, $V_n = M^{n-1} V_1$.
   (c) A l'aide de la **Partie A**, en déduire la loi de X_n.

3. Calculer $E(X_n)$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.