Code sujet : 298

CONCOURS D'ADMISSION DE 2014

Conception : ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

MATHÉMATIQUES

OPTION ÉCONOMIQUE

Mardi 6 mai 2014, de 8 h à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M).

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

d) Montrer que A possède trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2) L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} \text{ et } P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E.

Exercice 2

1) Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

2) Établir que f est impaire.

3) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2+1 \leq t^2+2t+1$, valable pour tout réel t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2$$

b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5) a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

6) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\,dt$.

b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$$

c) Conclure que : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$

d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = u_k$$

2) a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Compléter la fonction Pascal suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X.

```
Function X (theta : real) : integer ;
var Y : real ;
Begin Y := 0 ;   Repeat Y : = Y + 1 ; until(------) ; X := ------ ; end ;
```

3) Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit la fonction L, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \; L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.

L'objectif est de choisir la valeur de θ qui rend $L(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln(L(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

b) On considère la fonction φ, définie par :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \; \varphi(\theta) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta_n}$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta_n}$ pour la fonction L ?

On pose dorénavant : $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

d) Calculer le risque quadratique $r_{T_n}(\theta)$ de T_n et vérifier que $\lim_{n \to +\infty} r_{T_n}(\theta) = 0$.

Problème

1) Soit x un réel quelconque.

a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)\,dt$.

b) Montrer que : $y = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ x \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant $Y = \int_0^1 \max(X,t)\,dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\,dt$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

Tournez la page S.V.P.

2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

a) Déterminer la valeur de $P(X=0)$.

b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y.

c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Var u : integer ;
Begin
u : = random(4) ;
If ------ then ------ else y : = ------ ;
End ;
```

4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

e) Donner la valeur de $E(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
    Var u : real ;
  Begin
    u : = random ;
    y : = ------ ;
  End ;
```

5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X \le 0], [0 < X \le 1], [X > 1])$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \Phi(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1242 – D'après documents fournis