ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 20 mai 2003, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

P désignant un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on rappelle que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I + a_1 A + ... + a_m A^m$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.
On admet que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si A est une matrice de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, alors : $(PQ)(A) = P(A)\,Q(A)$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1) a. Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A\,X_n$.
   b. Vérifier que $(A - I)^2 (A - 2I) = 0$.

2) On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X-1)^2 (X-2)$.
   a. Justifier l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n , R_n) de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^n = P\,Q_n + R_n$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que : $R_n(X) = a_n + b_n\,(X-1) + c_n\,(X-1)^2$.
   c. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$, $b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

3) a. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A-I$ et $(A-I)^2$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n.

4) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit p un entier naturel et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p,+\infty[$ et telle que $\int_p^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} f(k)$.

1) a. Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a : $S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)\,dt$.

b. En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

b. En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ pour que :

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3) Dans cette question, pour tout réel x de $[2,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

a. Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2b).

b. En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$.

c. La série de terme général R_n $(n \geq 1)$ est-elle convergente ?

Exercice 3

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de A.

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice J, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on associe le réel $< A , B > = \mathrm{tr}({}^tA\ B)$.

1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on se place dans l'espace euclidien $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

2) Montrer que (I, J, J^2) est une famille orthogonale.

3) On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, J^2).

   a. Déterminer une base orthonormale de E, notée (K_0, K_1, K_2) telle que, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, K_i soit proportionnelle à J^i (avec bien sûr $J^0 = I$).

   b. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}$.
   Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, déterminer $< K_i , A >$ en fonction de certains des éléments de A.

   c. On note p la projection orthogonale sur E. Exprimer $p(A)$ en fonction de K_0, K_1, K_2 et de certains éléments de A.

   d. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\, p$.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, r désigne un entier naturel et x désigne un réel de $]0,1[$.

1) Pour tout entier naturel k non nul, calculer la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction f, définie sur $]0,1[$, par : $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

2) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, $C_{n+r}^{n} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+1}x^n = 0$.

4) Soit j_x la fonction définie sur $[0,x]$ par $j_x(t) = \dfrac{x-t}{1-t}$.
   Montrer que : $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq j_x(t) \leq x$.

5) a. Écrire la formule de Taylor entre 0 et x avec reste intégral pour la fonction f à l'ordre n.

   b. En déduire que : $0 \leq f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{k+r}^{k} x^k \leq (n+r+1)\, C_{n+r}^{n}\, x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$.

   c. Montrer finalement que : $\forall x \in]0,1[$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Partie 2

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

On effectue une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes telles que pour chacune d'entre elles, la probabilité de succès soit égale à p, avec $0 < p < 1$.

On note X_n le nombre d'épreuves qu'il faut réaliser pour obtenir, pour la première fois n succès, pas forcément consécutifs (X_n est donc le numéro de l'épreuve où l'on obtient le $n^{\text{ème}}$ succès). On convient que $X_n = 0$ si l'on n'obtient pas n succès.

1) Dans cette question seulement, on considère le cas $n = 1$.

   a. Reconnaître la loi de X_1.

   b. Donner l'espérance et la variance de X_1.

Dans toute la suite, on suppose que $n \geq 2$.

2) a. Déterminer $X_n(W)$.

   b. Pour tout entier naturel k, calculer la probabilité que l'on obtienne $n - 1$ succès au cours des $n + k - 1$ premières épreuves.

   c. Déduire de la question précédente que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = n + k) = C_{n+k-1}^{n-1}\, p^n (1-p)^k$.

   d. Utiliser le résultat de la partie 1 pour vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n + k) = 1$.

   En déduire $P(X_n = 0)$.

On dit que X_n suit la loi binomiale négative de paramètres n et p.

3) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(n + k)\, C_{n+k-1}^{n-1} = n\, C_{n+k}^{n}$.

   b. En utilisant le fait que, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = n + 1 + k) = 1$,

   montrer que X_n possède une espérance et donner sa valeur en fonction de n et p.

4) a. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\dfrac{n-1}{n+k-1}\, C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-2}^{n-2}$.

   b. Utiliser le théorème de transfert pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\dfrac{n-1}{X_n - 1}$ possède une espérance et que $E\left(\dfrac{n-1}{X_n - 1}\right) = p$.

5) a. Justifier que $\dfrac{n}{X_n}$ possède une espérance (on n'en demande pas le calcul).

   b. Montrer, sans calculer $E\left(\dfrac{n}{X_n}\right)$, que $E\left(\dfrac{n}{X_n}\right) > p$.

6) Dans cette question, on suppose que le paramètre p est inconnu.

   Pour tout $n \geq 2$, on pose : $Y_n = \dfrac{n-1}{X_n - 1}$ et $Z_n = \dfrac{n}{X_n}$.

   Des deux suites $(Y_n)_{n\geq 2}$ et $(Z_n)_{n\geq 2}$, laquelle est un estimateur sans biais de p ? On ne se préoccupera pas de l'éventuelle convergence de ces estimateurs.