ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Vendredi 13 mai 2005 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)I$, où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4.

b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Justifier que f est diagonalisable.

3) a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Écrire la matrice D de f dans cette base.

c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

4) a) Déterminer la matrice P^{-1}.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

c) En déduire explicitement la matrice A^n.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x\, e^{x(y^2+1)}$.

1) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Déterminer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

3) a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4) a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq x\, e^x$.

b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\, e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \notin [0,1[\end{cases}$

a) Pour tout x de $[0, 1[$, calculer $\int_0^x f(t)\, dt$.

b) En déduire que $\int_0^1 f(t)\, dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.

2) Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3) a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x.

b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

4) a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$.

b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

c) Exprimer X en fonction de Y, puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a.

d) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $E(e^{-2Y}) = \dfrac{a}{a+2}$.

En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

b) Donner la loi de X_1.

c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

2) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \le k \le n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1-p$.

3) a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n+1\}$, $P(X_{n+1} = k) = p\,P(X_n = k-1)$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, $P(X_n = k) = p^k(1-p)$.

En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.

4) Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

On rappelle que random(3) renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
    Readln(n) ;
    Randomize ;
    X : = 0 ;
    For k : = 1 to n do
    begin
        u : = random(3) ;
        if (u = 2) then X : = --------
                  else X : = -------- ;
    end ;
Writeln (X) ;
end.
```

5) a) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\, p^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

b) En déduire que $E(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

6) a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}^2) = p\big(E(X_n^2) + 2\,E(X_n) + 1\big)$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2) + (2\,n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n.

d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\big(1 - (2\,n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\big)$.