SUJET MATHÉMATIQUES 2007

Option Économiques

Exercice 1

Pour toute matrice M élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M, définie de la façon suivante : si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^tM$.

1) a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Écrire la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.
   c) En déduire que φ est diagonalisable et non bijectif.

2) Calculer A^2 et en déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = 2^{n-1}A$.

3) a) Montrer que $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{vect}(E_1, E_2+E_3, E_4)$, puis établir que $\dim \operatorname{Im}\varphi = 3$.
   b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$ puis déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.
   c) Établir que $\operatorname{Im}\varphi$ est le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 2.
   d) Donner, pour résumer, les valeurs propres de φ ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Exercice 2

On admet que, si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2).$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y \le x) = P([U = 1] \cap [X \le x]) + P([U = -1] \cap [X \ge -x]).$$

b) En déduire que Y suit la même loi que X.

2) a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.

b) En déduire que $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

3) a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

4) a) Vérifier que $E(X^2Y^2) = 3$.

b) Déterminer $\operatorname{cov}(X^2, Y^2)$.

c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

Exercice 3

1) a) Montrer que : $\forall x > 0,\ x - \ln x > 0$.

b) On pose alors : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$.

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

2) a) Montrer que f est continue sur D.

b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f_d'(0) = 0$.

3) a) Justifier que f est dérivable sur $D\setminus\{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D\setminus\{0\}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Étudier le signe de $f(x)$.

5) Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur D puis étudier ses variations.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\, dt$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t}\, dt$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Problème

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir "pile" et celle d'obtenir "face" étant donc toutes les deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées 1, 2, ..., k, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1) On décide de coder l'événement « obtenir un "pile" » par 1 et l'événement « obtenir un "face" » par 0.
On rappelle que la fonction random renvoie, pour un argument k de type integer (où k désigne un entier supérieur ou égal à 1) un entier aléatoire compris entre 0 et $k-1$.

a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
Program edhec_2007 ;
Var   z, hasard : integer ;
Begin
      Randomize ; z : = 0 ;
      Repeat z : = ........ ; hasard : = ........ ; until (hasard = 1) ;
      Writeln(z) ;
End.
```

b) Quelle instruction faut-il rajouter avant la dernière ligne de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

2) Établir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

3) Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

4) a) Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $P_{(Z=k)}(X = i)$.

b) En déduire que : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

c) On admet, dans cette question, que $\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}$. Vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = 1.$$

5) a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\,P(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$.

b) En déduire que X possède une espérance.

c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles Σ comme dans la question 4c), que :

$$E(X) = \frac{3}{2}.$$

6) a) Utiliser le résultat de la question 5a) pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

b) Établir alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles Σ comme dans la question 4c), que :

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

d) En déduire la valeur de $E(X^2)$ et vérifier que $V(X) = \frac{11}{12}$.

7) a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, pour la variable X.

b) En déduire que $P(X \geq 3) \leq \frac{11}{27}$.

8) On se propose dans cette question de calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X \geq 3)$.

a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln 2 - \int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}\,dx$.

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}\,dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}\,dx$.

d) Établir alors que $P(X = 1) = \ln 2$ puis donner la valeur de $P(X = 2)$.

e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $P(X \geq 3)$ en prenant $\ln 2 \simeq 0{,}7$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question ?