

## MATHEMATIQUES

### Option Economique

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

### Exercice 1

Dans cet exercice, on considère la fonction  $f$  définie comme suit :

$$f(0) = 1, \text{ et pour tout } x \text{ non nul de } ]-\infty, 1[, f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$$

1) Montrer que  $f$  est continue sur  $]-\infty, 1[$ .

2) a) Déterminer le développement limité de  $\ln(1-x)$  à l'ordre 2 lorsque  $x$  est au voisinage de 0.

b) En déduire que  $f$  est dérivable en 0, puis vérifier que  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

3) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ , puis calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  élément de  $]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[$ .

b) Déterminer le signe de la quantité  $\ln(1-x) + x$ , lorsque  $x$  appartient à  $]-\infty, 1[$ , puis en déduire les variations de  $f$ .

c) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.

4) a) Établir que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , il existe un seul réel de  $[0, 1[$ , noté  $u_n$ , tel que  $f(u_n) = n$  et donner la valeur de  $u_1$ .

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

### Exercice 2

Dans cet exercice,  $p$  désigne un réel de  $]0, 1[$  et on note  $q = 1-p$ .

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre  $p$ .

1) On pose  $Z = \text{Inf}(X, Y)$  et on admet que  $Z$  est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On rappelle que, pour tout entier naturel  $k$ , on a l'égalité :  $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$ .

a) Pour tout entier naturel  $k$ , calculer  $P(Z > k)$ .

b) Établir que, pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 1, on a :

$$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k).$$

c) En déduire que  $Z$  suit la loi géométrique de paramètre  $(1-q^2)$ .

2) On définit la variable aléatoire  $T$  de la façon suivante :

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  tel que  $X(\omega)$  est un entier naturel pair, on pose  $T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ , et, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$

tel que  $X(\omega)$  est un entier naturel impair, on pose  $T(\omega) = \frac{1+X(\omega)}{2}$ .

On admet que  $T$  est une variable aléatoire, elle aussi définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

a) Montrer que  $T$  prend des valeurs entières non nulles.

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel  $k$  non nul est élément de  $T(\Omega)$  et en déduire que  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

c) Exprimer l'événement  $(T = k)$  en fonction de certains des événements  $(X = i)$  puis montrer que  $T$  suit la même loi que  $Z$ .

3) On rappelle que la fonction random renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de  $[0, 1[$ . Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité  $p$  et calcule la valeur prise par la variable aléatoire  $X$  égale au rang du premier "pile" obtenu lors de ces lancers ( $X$  suit bien la loi géométrique de paramètre  $p$ ), et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par  $T$ , la variable aléatoire  $T$  ayant été définie dans la deuxième question.

```

Program edhec2009 ;
Var x, t, lancer : integer ;
Begin
  Randomize ; x := 0 ;
  Repeat lancer := random ; x := ----- ; until (lancer <= p) ;
  If (x mod 2 = 0) then ----- else ----- ;
  Writeln(t) ;
End.

```

### Exercice 3

Dans tout l'exercice,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

1) On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

a) En se référant éventuellement à une loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} h(x) dx$  puis donner sa valeur.

b) Montrer que  $h$  peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire  $X$ .

c) Montrer la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x h(x) dx$  puis donner sa valeur. En déduire que  $X$  possède une espérance et la déterminer.

2) Dans cette question, on considère une variable aléatoire  $Y$  de densité  $f$ , nulle sur  $] -\infty, 0 [$ , continue sur  $[0, +\infty [$  et strictement positive sur  $[0, +\infty [$ . On note alors  $F$  la fonction de répartition de  $Y$ .

Justifier que, pour tout réel  $x$ , on a :  $1 - F(x) > 0$ .

On définit alors la fonction  $g$  par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

3) a) Montrer que  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $g$  est continue sur  $] -\infty, 0 [$  et sur  $[0, +\infty [$ .

c) En remarquant que, si l'on pose  $u'(x) = -f(x)$ , on peut choisir  $u(x) = 1 - F(x)$ , montrer grâce à une intégration par parties, que  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  est une intégrale convergente et que  $\int_0^{+\infty} g(x) dx = 1$ .

d) Établir que  $g$  peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire  $Z$ .

e) Étude d'un cas particulier.

Vérifier qu'une variable aléatoire  $Y$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (avec  $\lambda > 0$ ) vérifie les conditions imposées dans la deuxième question. Montrer alors que  $Z$  suit la même loi que  $X$ .

## Problème

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

### Partie 1

On note  $e_0, e_1$  et  $e_2$  les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_0(t) = 1, e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2 .$$

On rappelle que la famille  $(e_0, e_1, e_2)$  est une base de l'espace vectoriel  $E$  constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application  $f$  qui, à tout élément  $P$  de  $E$ , associe  $f(P) = P'' - 5P' + 6P$ , où  $P'$  et  $P''$  désignent respectivement les dérivées première et seconde de  $P$ .

1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) Écrire la matrice  $A$  de  $f$  relativement à la base  $(e_0, e_1, e_2)$ .

3) a) Établir que  $f$  est un automorphisme de  $E$ . En déduire  $\text{Ker} f$ .

b) Écrire la matrice de  $f^{-1}$  relativement à la base  $(e_0, e_1, e_2)$ .

4) a) Déterminer la seule valeur propre  $\lambda$  de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

b) Préciser le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

### Partie 2

On note  $F$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $Id$  l'endomorphisme identité de  $F$ .

On considère l'application  $g$  qui, à toute fonction  $u$  de  $F$ , associe  $g(u) = u'' - 5u' + 6u$ , où  $u'$  et  $u''$  désignent respectivement les dérivées première et seconde de  $u$ .

1) Montrer que  $g$  est un endomorphisme de  $F$ .

2) Dans cette question, on se propose de déterminer  $\text{Ker}(g - 6Id)$ . On considère donc une fonction  $u$  élément de  $\text{Ker}(g - 6Id)$ .

a) Montrer que la fonction  $j$ , définie pour tout réel  $x$  par  $j(x) = u'(x)e^{-5x}$ , est constante.

b) En déduire que  $\text{Ker}(g - 6Id) = \text{vect}(u_1, u_2)$ , où  $u_1$  est la fonction constante égale à 1 et  $u_2$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $u_2(x) = e^{5x}$ .

On se propose, dans les trois questions suivantes de déterminer  $\text{Ker } g$ . On considère donc une fonction  $u$  élément de  $\text{Ker } g$ .

3) On pose  $v = u' - 2u$ .

a) Montrer que  $v' = 3v$ .

b) En déduire que la fonction  $h$ , définie pour tout réel  $x$  par  $h(x) = v(x)e^{-3x}$ , est constante.

c) Conclure qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \alpha e^{3x}$ .

4) On pose  $w = u' - 3u$ .

a) Montrer que  $w' = 2w$ .

b) En déduire que la fonction  $k$ , définie pour tout réel  $x$  par  $k(x) = w(x)e^{-2x}$ , est constante.

c) Conclure qu'il existe un réel  $\beta$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = \beta e^{2x}$ .

5) a) Montrer, en utilisant les deux questions précédentes, que  $\text{Ker } g = \text{vect}(u_3, u_4)$ , où les fonctions  $u_3$  et  $u_4$  sont définies pour tout réel  $x$  par  $u_3(x) = e^{3x}$  et  $u_4(x) = e^{2x}$ .

b) Montrer enfin que  $\dim \text{Ker } g = 2$ .