ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Vendredi 7 mai 2010 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1) Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \text{ et } f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

2) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

3) Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

5) a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.

b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6) Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y).$$

Montrer que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[,\ g(x, y) \geq 2\ln(2)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4})\ldots(1 + \frac{1}{2^n})$.

1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
 b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
3) a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
 b) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
4) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
5) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
 a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.
 b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\ln(\frac{\ell}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.
 c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leq \ln(\frac{\ell}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}$.
 d) Déduire de la question précédente que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$.
 e) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1) a) Vérifier que f est une fonction paire.
 b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3) On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.
 a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$.
 b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

4) a) Montrer que, si x est positif, alors $1-\mathrm{e}^{-x}$ appartient à [0, 1[et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1-\mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.

b) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur [0, 1[. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1-U)$ et reconnaître la loi de Z.

c) Simulation informatique de la loi de Y. On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur [0, 1[. Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
Function expo : real ;
   Begin
   expo : = ------ ;
   End ;
```

Problème

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes:

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \text{ et } f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 .$$

Partie 1 : étude de *f*.

1) a) Écrire la matrice M de f dans $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}\,f$ puis celle de $\mathrm{Ker}\,f$.

c) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}\,f$, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.

d) Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

e) En déduire que f est diagonalisable.

2) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a : $M^j = PD^j P^{-1}$.

d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k\in\mathbb{N}^*$) :

Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

Soit X_k a pris une valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1) Reconnaître la loi de X_1.

2) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
On rappelle que random(n) renvoie un entier compris entre 0 et $n-1$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable aléatoire X_k, l'entier naturel k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
Program simul ;
Var i, k, X, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(k) ; X : = random(3) + 1 ;
For i : = 2 to k do   begin
                      tirage : = random(3) + 1 ;
                      If X = 1 then  X : = ------
                            Else  If  tirage < > X   then  X : = ------ ;
                      end ;
Writeln (X) :
end.
```

3) On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$.

a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k = j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b) On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $U_{k+1} = AU_k$.

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors , pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$.

4) a) Vérifier que $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

b) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right),\ P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

c) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

5) a) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

b) Écrire une fonction Pascal, notée esp, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de esp(k).