ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 6202

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 1999 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures
Option économique

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.
L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

(on donne : $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0{,}77$ à 10^{-2} près par excès et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0{,}44$ à 10^{-2} près par défaut).

a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = a \quad u_1 = b$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$.

Question 1

1 a) - Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.

1 b) - Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.

1 c) - Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.

2 a) - Montrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

2 b) - Vérifier que, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2\,(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

2 c) - On note (x_n) la suite définie par $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \{ M \in E \ / \text{ il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \alpha I \}$

et pour toute matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\tau(M) = a + d$ et $\delta(M) = ad - bc$.

Question 1

On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, converge vers la matrice O si (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) sont des suites réelles de limite nulle.

Justifier les résultats suivants :

1 a) - Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de matrices, λ un réel et M une matrice : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la matrice O, alors $(A_n + B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\lambda A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(MA_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n M)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent aussi vers O.

1 b) - Si $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, la suite de matrices $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers O.

1 c) - Si une matrice A est diagonalisable, de valeurs propres λ et μ avec $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, alors la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice O.

Question 2

Dans toute cette question, A désigne un élément de E tel que $\delta(A) < 0$.

On se propose de montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.

2 a) - Montrer que A n'est pas un élément de H.

2 b) - Vérifier par le calcul que pour tout élément M de E, on a :

$$M^2 = \tau(M)\, M - \delta(M)\, I \quad (*)$$

2 c) - Montrer qu'il existe deux réels distincts λ et μ tels que : $\lambda + \mu = \tau(A)$ et $\lambda\mu = \delta(A)$.

2 d) - On pose $M = A - \lambda I$ et $N = A - \mu I$.

Montrer que $MN = O$ et en déduire que l'hypothèse "M est inversible" conduit à une contradiction.

Montrer de même que N n'est pas inversible.

2 e) - En déduire que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P de E inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Question 3

On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\times]0, 1[$ et f l'application définie sur U par : $(x,y) \to f(x,y) = x^2 - x + xy^2 - xy$.

3 a) - Montrer que f est strictement négative sur U.

3 b) - Montrer (en rédigeant soigneusement) que f admet un unique extremum sur U et que celui-ci est un minimum dont on donnera la valeur.

En déduire que pour tout élément (x, y) de U : $-\frac{25}{64} \leq f(x,y) < 0$.

Question 4

Soient a et b deux réels tels que (a, b) soit un élément de l'ouvert U défini précédemment.

On pose $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ a(1-b) & a-1 \end{pmatrix}$

On se propose de montrer que la suite de matrices $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers O.

4 a) - Calculer $\tau(Q)$ et $\delta(Q)$.

Vérifier que les résultats de la question 2 s'appliquent pour A = Q et en déduire que Q admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que :

$$-\frac{1}{3} < \lambda + \mu < \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{25}{64} \leq \lambda\mu \leq 0.$$

4 b) - Exprimer $\lambda^2 + \mu^2$ en fonction de $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$ et en déduire que $\lambda^2 + \mu^2 < 1$.

Pourquoi peut-on affirmer que la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers O ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

On modélise la durée de fonctionnement d'un appareil par une variable aléatoire réelle T définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant une densité f.

On note F sa fonction de répartition et on suppose que F vérifie les propriétés :

- $F(t) = 0$ pour tout réel $t \leq 0$
- F est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Sous une hypothèse introduite dans la question 2, on se propose d'expliciter F et f, puis de calculer l'espérance E(T) de T, *"temps moyen de fonctionnement"*.

Question 1

On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ converge et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Soit α un réel strictement positif ; si x est un élément de $\mathbb{R}^+$, on pose :

$$I(x) = \int_0^x 2u^2\, e^{-u^2} du \qquad \text{et} \qquad J(x) = \int_0^x t^2\, e^{-(t/\alpha)^2} dt.$$

1 a) - A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$, J(x) en fonction de $I(\frac{x}{\alpha})$.

1 b) - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$:

$$I(x) = \int_0^x e^{-u^2} du \; - \; x\, e^{-x^2}.$$

1 c) - En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-(t/\alpha)^2} dt$ converge et vaut $\frac{\alpha^3\sqrt{\pi}}{4}$.

Question 2

2 a) - Montrer que, pour tout élément u de $\mathbb{R}^+$, $F(u) < 1$, puis en déduire que $P(T \geq u) \neq 0$.

2 b) - Soient t_0 et t des réels tels que $0 \leq t_0 < t$.

On pose : $q(t_0, t) = \frac{1}{t - t_0} P(t_0 \leq T \leq t \;/\; T \geq t_0)$ (probabilité conditionnelle).

$q(t_0, t)$ est *le taux d'arrêt de fonctionnement entre les instants t_0 et t*.

On définit ensuite, sous réserve d'existence, *le taux d'arrêt de fonctionnement instantané en t_0* par : $\tau(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0^+} q(t_0, t)$.

Exprimer $q(t_0, t)$ en fonction de t, t_0, $F(t_0)$ et F(t).

En déduire que $\tau(t_0)$ existe et que $\tau(t_0) = \frac{F'(t_0)}{1 - F(t_0)}$

Dans la suite de l'énoncé, on fait l'hypothèse suivante :
il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout élément t de $\mathbb{R}^+$, $\tau(t) = ct$.

2 c) - Montrer que, pour tout élément t de $\mathbb{R}^+$, on a : $- \ln[1 - F(t)] = c\frac{t^2}{2}$.

2 d) - Soit t un élément de $\mathbb{R}^+$.

Expliciter $F(t)$, puis montrer, en posant $\alpha = \sqrt{\frac{2}{c}}$, que $f(t) = \frac{2}{\alpha^2} t \, e^{-(t/\alpha)^2}$

2 e) - Montrer enfin que $E(T)$ existe et donner sa valeur en fonction de c.