ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 7 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.

d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbf{P}([X=Y]) = \dfrac{p}{2-p}$ et en déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \ ; \ M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

c) Calculer les probabilités $\mathbf{P}([S=2]\cap[D=0])$, $\mathbf{P}([S=2])$ et $\mathbf{P}([D=0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbf{P}([S=n])=(n-1)p^2q^{n-2}$.

e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

PROBLÈME

Partie A : Étude d'une fonction

1. a) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,1[$, vérifiant pour tout réel x appartenant à $]-\infty,0[\cup]0,1[$, l'égalité :

$$x(1-x)f'(x)+(1-x)f(x)=1$$

Soit h la fonction définie sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$, par : $h(x)=xf(x)$.
Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
En déduire qu'il existe deux constantes réelles c_1 et c_2 vérifiant

$$\begin{cases}\forall x\in]-\infty,0[, & h(x) = -\ln(1-x)+c_1\\ \forall x\in]0,1[, & h(x) = -\ln(1-x)+c_2\end{cases}$$

b) On définit une fonction f sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ par :

$$\begin{cases}\forall x\in]-\infty,0[, & f(x) = \dfrac{-\ln(1-x)+c_1}{x}\\ \forall x\in]0,1[, & f(x) = \dfrac{-\ln(1-x)+c_2}{x}\end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.
Déterminer les constantes c_1 et c_2 pour que la fonction f soit prolongeable par continuité en 0.

2. Dans toute la suite de cette partie, f désigne la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$\begin{cases}f(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ f(0)=1\end{cases}$$

a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x\mapsto\ln(1-x)$ puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f .

b) En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

c) Montrer que, pour tout x de $]-\infty,0[\cup]0,1[$, on a :

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}-f(x)\right)\frac{1}{x}$$

En utilisant le développement limité de la question précédente, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

3. a) Étudier le signe de la fonction φ définie sur $]-\infty,1[$ par : $\varphi(x)=\dfrac{x}{1-x}+\ln(1-x)\cdot$
En déduire les variations de la fonction f

b) Donner le tableau de variation de la fonction f et l'allure de la représentation graphique de f en précisant les asymptotes, la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de l'origine.

4. Soit x un réel de l'intervalle $]0,1[$.

a) Soit h la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par : $\quad h(t) = -\ln(1-t)$.
Calculer, pour tout réel t de $]-\infty,1[$, $h'(t)$, $h''(t)$, puis pour tout entier naturel n non nul, $h^{(n)}(t)$.

b) Justifier, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}}\,\mathrm{d}t$$

c) Établir, pour tout réel t de l'intervalle $[0,x]$, la double inégalité : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$ ·
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la double inégalité :

$$0 \leqslant f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1} \leqslant x^{n+1} f(x)$$

d) Justifier l'égalité : $\qquad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ ·

Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Dans cette question f est la fonction définie à la question **2.** de la partie A.

a) Soit f_1 la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{\ln t}{t-1} & \text{si} \quad t \neq 1 \\ f_1(1) = 1 \end{cases}$

Justifier la continuité de f_1 sur $]0,1]$ et établir, pour tout réel x de $]0,1[$, l'égalité :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1-x}^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Soit a un réel de l'ntervalle $]0,1[$. Établir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$\int_a^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{a^{n+1}\ln a}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}(1-a^{n+1})$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$ et l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$ ·

c) Soit a un réel de l'intervalle $]0,1[$ et n un entier naturel, démontrer pour tout t de $[a,1]$, l'égalité

$$\int_a^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{n} \int_a^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t = \int_a^1 t^{n+1} f_1(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer que la fonction $t \mapsto t\,f_1(t)$ est prolongeable en une fonction h_1 continue sur $[0,1]$.
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle vérifie :

$$\int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 t^n\,h_1(t)\,\mathrm{d}t$$

e) On désigne alors par M le maximum sur $[0,1]$ de la fonction h_1.
Établir, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$0 \leqslant \int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{M}{n+1}$$

f) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, puis l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ·

2. On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = \dfrac{6}{\pi^2} f(t) & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que g est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire ayant pour densité g.
Vérifier, pour tout réel x de $]0,1[$, l'égalité $\displaystyle\int_0^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_{1-x}^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.
Utiliser alors le résultat de la question **1.**b pour prouver que X possède une espérance et la calculer.

c) Par une méthode analogue, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (t-1)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ est égale à $\dfrac{1}{4}$ ·
En déduire que la variable aléatoire X^2 admet une espérance, préciser sa valeur et calculer la variance de la variable aléatoire X.

Partie C : Encadrement d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on désigne par V l'ensemble ouvert défini par :

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\}$$

1. Soit u la fonction de V dans $\mathbb{R}$: $(x,y) \mapsto u(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}$.

a) Montrer que la fonction u admet un minimum sur V dont on précisera la valeur, mais n'admet pas de maximum.

b) Montrer que la fonction u est majorée par $\dfrac{7}{8}$ sur l'ouvert V.

2. Soit F la fonction : $\quad (x,y) \longmapsto F(x,y) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\dfrac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}$ ·

a) À l'aide des résultats de la partie A, montrer que F est définie sur l'ouvert V et qu'elle y admet un maximum. Préciser la valeur de ce maximum.

b) Donner un encadrement de $F(x,y)$ pour tout (x,y) de V.