MATHEMATIQUES III

Option économique

Geneviève ROCHE

Éric GUICHET

937 candidats ont composé cette année sur l'épreuve de mathématiques III.

Le sujet

Comme les années précédentes, l'épreuve était constituée de deux exercices.

Le premier, de poids légèrement plus important au sein du barème (environ 5/9 des points), proposait l'étude d'une marche aléatoire ; le second consistait à calculer, après avoir prouvé leur existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire à densité.

Bilan de la correction des copies

À quelques rares exceptions près, les candidats ont abordé les deux exercices.

- **Exercice 1** (probabilités et algèbre linéaire)

Partie I (Étude d'une suite de variables aléatoires)

L'expérience aléatoire décrite est généralement bien comprise, les lois de probabilité demandées sont obtenues sans difficulté, et la mise en œuvre des méthodes classiques en algèbre linéaire (détermination des sous-espaces propres, algorithme d'inversion d'une matrice, calcul de la puissance n-ième d'une matrice diagonalisable) est maîtrisée.

On pourrait simplement regretter quelques calculs inutiles et gourmands en temps (l'énoncé donnait les valeurs propres), ainsi que des erreurs de calcul sur les vecteurs propres, erreurs d'autant plus difficilement acceptables qu'une vérification élémentaire les détectait rapidement. Des inexactitudes, aussi, dans la condition suffisante de diagonalisabilité ont été fréquemment relevées ; on a ainsi pu lire que M était diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres était égale au rang de M (notion pourtant hors programme), à $\dim(M)$, voire à la dimension de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Partie II (Étude de l'arrêt du mobile)

Cette deuxième partie s'est révélée très discriminante.

Même si l'énoncé décomposait pas à pas la démarche menant à l'expression de p_i, il s'agissait d'en comprendre l'idée directrice pour être en mesure de prendre la bonne initiative à la dernière étape.

Une des erreurs les plus répandues fut de « reconnaître » en $(u_i)_{0 \le i \le N}$ une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

Alors que de nombreux étudiants s'essayent maladroitement à justifier l'égalité : $p_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = N)$, seulement quelques uns voient qu'il s'agit ici d'appliquer le théorème concernant les suites croissantes d'événements.

- **Exercice 2** (probabilités et analyse)

Partie I (Étude d'une fonction)

Les notions abordées (convergence d'une intégrale, négligeabilité et équivalence, fonction de répartition, densité) sont généralement assimilées, mais certaines erreurs reviennent un nombre significatif de fois : on écrit que $x^3 e^x$ est équivalent à e^x en $+\infty$, que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, et on affirme que, f étant paire, on a l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx,$$

avant de se lancer dans de laborieux calculs. De plus, quelques candidats proposent une fonction de répartition manifestement à valeurs négatives, sans que cela suscite la moindre réaction de leur part.

Partie II (Calcul d'une variance)

Même si certaines affirmations péremptoires, telle : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1 + e^{-x}) = 0$, auraient mérité d'être justifiées, les premières questions (intégrations par parties, démonstration par récurrence) ont dans une très large mesure été traitées avec succès.

En revanche, l'application de la formule de Taylor-Lagrange a posé des difficultés insurmontables à un nombre impressionnant de candidats, certains allant jusqu'à s'autoriser quelques malhonnêtetés (qui ne sauraient échapper aux correcteurs !), afin de parvenir à l'inégalité que demandait d'établir l'énoncé.

****

Conclusion

Les copies sont, à une très large majorité, présentées de façon à être agréables à lire, rédigées avec le souci de la rigueur et de la clarté.

Cette année encore, le jury a pu apprécier le bon niveau d'ensemble des candidats et l'excellence de certains, ce qui ne pourrait être atteint sans le travail de très grande qualité fourni par les étudiants, comme par les enseignants qui les ont en charge.

Moyenne générale :

Écart-type :