ESSEC option Eco 2003
Maths III

Exercice 1 Suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous- ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 3a\, u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$.
L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F .

I. Étude du cas particulier $a = 1$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0,\ u_1, u_2$, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 3\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n , le produit $M\, X_n$.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. **a**) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.
b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M , c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que les vecteurs $e'_1,\ e'_2,\ e'_3$ aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.
b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de T^n

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}$ ' . Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. **a**) Calculer P^{-1}(les calculs devront figurer sur la copie)
b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de $u_0,\ u_1,\ u_2$ et de l'entier naturel n.

II . Étude du cas général .

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. **Structure de F .**

a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
b) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_n & \to & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$.
Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; en déduire que F est de dimension finie et préciser sa dimension.

c) Justifier que des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

d) On suppose dans cette question: $a = 0$.
On note $s,\ s', s''$ les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}\left((1,0,0)\right),\ s' = \varphi^{-1}\left((0,1,0)\right),\ s'' = \varphi^{-1}\left((0,0,1)\right)$$

Déterminer $s,\ s', s''$ (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites); en déduire la forme générale d'un élément de F .

e) Reprendre la question précédente dans le cas $a = 1/3$

2. Suites géométriques de F .

a) Démontrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, le réel r est racine de la fonction polynomiale $p : x \to x^3 - 3a\,x + 3a - 1$
(avec la convention : $0^0 = 1$)

b) Déterminer, en fonction du réel a , le nombre de racines de la fonction p ainsi que leur valeur.

3. Cas où p admet trois racines distinctes.

a) Démontrer que, lorsque la fonction p admet trois racines distinctes 1, r_1 et r_2, les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F

b) Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel n , le terme général u_n de la suite, appartenant à F , qui vérifie: $u_0 = 1,\ u_1 = 10,\ u_2 = -8$

4. Cas où p admet une racine double.

a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+3} - 3a\,u_{n+1} - (1-3a)\,u_n = r^n\left(n\,p\,(r) + r\,p'\,(r)\right)$$

b) En déduire que, lorsque p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1 la suite $(n\,{r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F , et démontrer que les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\,{r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F .

c) Dans le cas où $a = 1/4$, exprimer le terme général u_n d' un élément quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F en fonction de $u_0,\ u_1$ et u_2 et de l'entier naturel n ; préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2: probabilités et simulation informatique.

I. Exemple introductif.

On effectue des lancers successifs (indépendants) d'un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$, les variables aléatoires donnant le numéro amené par le dé aux premier lancer, deuxième lancer, ...

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n, la somme des points obtenus aux n premiers lancers.

Enfin, pour tout entier naturel k non nul, la variable aléatoire T_k compte le nombre de celles des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ qui prennent une valeur inférieure ou égale à k .

Par exemple, si les cinq premiers numéros amenés par le dé sont, dans l'ordre : 3, 1, 2, 3, 6, alors les événements suivants sont réalisés : $(Y_1 = 3)$, $(Y_2 = 4)$, $(Y_3 = 6)$, $(Y_4 = 9)$, $(Y_5 = 15)$, et les variables aléatoires T_2 , T_3 , T_9 et T_{12} prennent respectivement pour valeurs 0, 1, 4 et 4 .

1. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_{12}.

a) Donner les valeurs prises par $T\ _{12}$
(On explicitera un exemple de résultat correspondant à chacune des deux valeurs extrêmes).
Quelle est la probabilité que T_{12} prenne la valeur 12 ?

b) Simulation informatique
Compléter les lignes marquées par les symboles . . . du programme Pascal ci-dessous, de façon qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur de $T\ _{12}$.
On rappelle que `random(6)` fournit un entier aléatoire parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5 .

```
Program ESSEC2003A;
var x,y,t:integer;
begin
     randomize;
     y:=0;t:=0;
     repeat
          x:=random(6)+1;
          y:=...;
          t:=...;
     until ...;
     writeln(T=',t);
end.
```

2. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_2

a) Déterminer la loi de probabilité de T_2.

b) Qu'obtient-on à l'affichage en exécutant le programme ci-dessous ?

```
program Essec2003B;
var i,d1,d2:integer;
loi:array[0..2] of integer;
begin
     for i:=0 to 2 do loi[il:=0;
     for d1:=1 to 6 do for d2:=1 to 6 do
          if d1 > 2 then loi[0]:=loi[0]+1 else
               if d1+d2 > 2 then loi[1]:=Ioi[1]+1
                    else loi[2]:=Ioi[2]+1;
     for i:=0 to 2 do write(loi[i]/36);
end.
```

Dorénavant, on considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{T};P)$, mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose alors : $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n.

On fixe un réel strictement positif x , et on s'intéresse au nombre T_x des variables aléatoires Y_n telles que l'événement $(Y_n \leq x)$ soit réalisé.

II. Cas général.

1. Démontrer que la suite$(F_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante.

2. Démontrer chacune des deux relations suivantes :

- $P(T_x = 0) = 1 - F_1(x)$
- pour tout entier naturel n non nul, $P(T_x = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$

3. En déduire l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

Autrement dit, T_x est une variable aléatoire si, et seulement si : $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

III. Cas d'une loi géométrique.

Dans cette troisième partie, les variables aléatoires X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p , $(0 < p < 1)$, et on pose : $q = 1 - p$.
De plus, x est ici un entier naturel non nul fixé.
On rappelle que, par convention : $C_n^m = 0$ si n et m sont des entiers naturels tels que $m > n$.

1. Loi de Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Préciser $Y_n(\Omega)$

b) Par un calcul de loi de somme, déterminer la loi de Y_2, puis celle de Y_3.

c) Démontrer que, pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq n$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{m} C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$$

d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(Y_n = k) = C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} p^n$$

si k est un entier supérieur ou égal à n.

2. Calcul de $P(T_x = n)$.

a) Justifier que T_x est une variable aléatoire et préciser $T_x(\Omega)$.
Calculer $P(T_x = 0)$

b) Vérifier chacune des deux égalités :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= p^n \sum_{k=n}^{x} C_k^n q^{k-n} - qp^n \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1} \\ F_{n+1}(x) &= p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1} \end{aligned}$$

En utilisant **II.2.** , en déduire le calcul de $P(T_x = n)$ pour n entier supérieur ou égal à 1.

c) Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.

3. Sachant que les variables aléatoires X_1, $X_2 \ldots$ sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation de n premiers succès équivaut à la réalisation du $n^{ième}$ succès, donner une interprétation , soigneusement exposée, de chacune des variables aléatoires Y_n et T_x, et retrouver ainsi la loi de T_x.

IV. Cas d'une loi exponentielle.

Dans cette dernière partie, les variables aléatoires X_n suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.
On admettra qu'alors Y_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. À l'aide de **II.2.** , calculer $P(T_x = 0)$, puis $P(T_x = n)$ pour tout entier naturel n non nul.

2. Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.