

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Lundi 15 Mai 2000 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $2/3$.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/2$.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/3$.
- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

ABC_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».

AB_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ».

On définit de façon analogue les événements BC_n et CA_n .

A_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, seul A n'est pas éliminé ».

On définit de façon analogue les événements B_n et C_n .

\emptyset_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin, ABC_0 est l'événement certain, $AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, \emptyset_0$ l'événement impossible.

PARTIE I

On détermine dans cette partie I les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1°) Calcul de probabilités.

- Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.
- En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
- En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

2°) Détermination de probabilités conditionnelles

- Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel n .
Dans la suite, on ne considérera donc que les événements $ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, \emptyset_n$.
- Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} / ABC_n)$.
- Expliciter $p(BC_{n+1} / ABC_n)$ à l'aide de la question 1°, puis donner $p(CA_{n+1} / ABC_n)$.
- Expliciter $p(A_{n+1} / ABC_n)$, $p(B_{n+1} / ABC_n)$ et $p(C_{n+1} / ABC_n)$.
- Expliciter $p(A_{n+1} / CA_n)$, $p(B_{n+1} / BC_n)$, $p(C_{n+1} / CA_n)$ et $p(C_{n+1} / BC_n)$.
- Expliciter $p(\emptyset_{n+1} / ABC_n)$, $p(\emptyset_{n+1} / BC_n)$ et $p(\emptyset_{n+1} / CA_n)$.

3°) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

- Quelle est la probabilité de l'événement $T = 1$?
- Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :
 $ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n$.
- Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$:
 $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$
(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$).
- Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$:
 $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n$
(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$).
- Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, et en déduire la probabilité $p(T = n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n = 1$ le résultat obtenu à la question a).
- Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T = n)$ (avec $n \geq 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T .

4°) Probabilités pour que A, B, C remportent le combat

- Montrer que l'événement « A remporte le combat à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve » est impossible si $n = 1$, et montrer qu'il est égal à la réunion des événements suivants si $n \geq 2$:
 $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n$ pour $0 \leq k \leq n-2$
(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n$).
- Calculer la probabilité pour que A remporte le combat à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve ($n \geq 2$).
- En déduire la probabilité pour que A remporte le combat (c'est à dire pour qu'il ne soit pas éliminé à l'issue du combat).
- Déterminer de même la probabilité pour que B remporte le combat.
- Déterminer de même la probabilité pour que C remporte le combat.

PARTIE II

Dans cette partie, on retrouve par des méthodes matricielles les probabilités pour que A, B, C remportent le combat en n'utilisant que les résultats des questions I.1° et I.2°.

1°) Expression de la matrice de transition M

- a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $p(ABC_n), p(BC_n), p(CA_n), p(A_n), p(B_n), p(C_n), p(\emptyset_n)$.

Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n.$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1.

- b) En déduire E_n en fonction de n , de M et E_0 .

2°) Calcul des puissances de la matrice M

- a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V'' et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{bmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{bmatrix}, \quad M'' = \begin{bmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4.

Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{bmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}.$$

- b) Expliciter les matrices U et V telles que :

$$M = \begin{bmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{bmatrix}.$$

- c) Etablir enfin par récurrence sur $n \geq 1$ l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \dots + VU^{n-1} & I_4 \end{bmatrix}.$$

3°) Diagonalisation de la matrice U

- a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :

- la première composante de V_1 vaut 1.
- la troisième composante de V_2 vaut 1.
- la deuxième composante de V_3 vaut 1.

- b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, V_3 . Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4°) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

- a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$.

- b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X .

On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles (U^n) , $(I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \dots + VU^{n-1})$.

- c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n) .
- d) Vérifier que les suites $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(A_n))$, $(p(B_n))$, $(p(C_n))$, $(p(\emptyset_n))$.
Retrouver alors les probabilités obtenues en I pour que A, B, C remportent le combat.
