



Concepteur : EMLYON Business School

Première épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 27 avril 2009 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1.
 - a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 - b. Justifier que f est de classe C^1 sur $] - \infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] - \infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer :
$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$
 - d. Établir que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
2.
 - a. Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$$u(x) = (1 - x)e^x - 1.$$
 - b. Montrer :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0.$$
 - c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau des variations de f .

- d. Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.
- e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.
- Établir : $\forall x \in [0; +\infty[$, $e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$.
 - Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
 - Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
 - Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
- En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.
- Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
- Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

- Montrer que G est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[$, $0 \leq G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.
 - Montrer : $\forall x \in]-\infty; 0]$, $G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.
- Dresser le tableau des variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?
2. Déterminer les valeurs propres de A .
Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
3. Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = PDP^{-1}$ et calculer P^{-1} .

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M , matrice carrée d'ordre trois. Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}MP$. (La matrice P a été définie en **I.3**.)

1. Montrer : $M^2 = A \iff N^2 = D$.
2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $ND = DN$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

2. En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5**.)
3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

$$AF = FA \iff BF = FB.$$

EXERCICE 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q .

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note :

B_i l'événement « la i -ème boule tirée est blanche »,

N_i l'événement « la i -ème boule tirée est noire ».

1. a. Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

b. Vérifier :
$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

c. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2. a. Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$.

(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

b. En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

c. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.

5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{Cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.