

## Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

# MATHEMATIQUES

## 1ère épreuve (option économique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a. Calculer  $K^2$ .
- b. En déduire que la matrice  $K$  est inversible et déterminer  $K^{-1}$ .
- c. Montrer que la matrice  $K$  n'admet aucune valeur propre réelle.
2. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On note  $M$  la matrice définie par  $M = aI + bK$ .
  - a. Montrer :  $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$ .
  - b. En déduire que, si  $(a, b) \neq (0, 0)$ , alors la matrice  $M$  est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de  $I$  et  $M$ .
  - c. Application : donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  associé à la matrice  $K$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On considère les quatre éléments suivants de  $\mathbb{R}^4$  :

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

- Montrer que la famille  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
- Exprimer  $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$  en fonction de  $v_1, v_2, v_3, v_4$  et en déduire la matrice  $K'$  associée à  $f$  relativement à la base  $\mathcal{C}$ .
- Déterminer la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ .
- Rappeler l'expression de  $K'$  en fonction de  $K, P$  et  $P^{-1}$ .

## EXERCICE 2

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction polynomiale  $P_n : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

### I. Étude des fonctions polynomiales $P_n$

- Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}, \quad \text{où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

- Étudier, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les variations de  $P_n$  sur  $[0; +\infty[$  et dresser le tableau de variations de  $P_n$ .

- Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P_n(1) < 0$ .

- Vérifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left( -\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P_n(2) \geq 0$ .

- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $P_n(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in [1; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $x_n$ , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

- Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de  $x_2$  à  $10^{-3}$  près.

## II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [1; +\infty[$  :

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## EXERCICE 3

### 1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier naturel  $k$  et pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$ , que la série  $\sum_{n \geq k} C_n^k x^n$  est

convergente et on note  $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$ .

- a. Vérifier, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$  :

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

- b. Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, k)$  tel que  $k < n$ , montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

- c. Pour tout entier naturel  $k$  et pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$ , déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

- d. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

### 2. Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).  
On définit la variable aléatoire  $N$  égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si  $N$  prend une valeur entière positive non nulle notée  $n$ , on réalise alors une seconde série de  $n$  tirages dans l'urne, toujours avec remise.  
On définit la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

- a. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $N$ . Donner son espérance.  
b. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la probabilité conditionnelle  $P(X = k / N = n)$ .

c. Vérifier : 
$$P(X = 0) = \frac{4}{9} .$$

- d. En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k .$$

- e. Montrer que  $X$  admet une espérance  $E(X)$  et calculer  $E(X)$ .

f. Montrer : 
$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k .$$

### 3. Étude d'une variable aléatoire à densité

On note  $a = -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$  et on définit la fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a; +\infty[ \\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle :  $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln \frac{4}{9}}$ .

- a. Montrer que  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée  $Y$ .  
b. Déterminer une densité  $f$  de  $Y$ .  
c. Déterminer une primitive de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}}$ .  
d. Montrer que  $Y$  admet une espérance  $E(Y)$  et calculer  $E(Y)$ .

- FIN -