

PROBLEME 1

On considère l'application $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geq 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n dt, \quad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

- 1) Montrer que φ est continue sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale J_n existe.
- 2)a) Montrer que φ est strictement positive sur $[0; 1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
 b) Établir, pour tout réel $t \in]0; +\infty[$: $|\varphi(t)| < 1$.
- 3)a) Montrer, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$: $\varphi(t) \geq 1 - t$.
 (On pourra étudier les variations sur $[0; +\infty[$ de l'application $t \mapsto \sin t - t + t^2$).
 b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$: $J_n \geq \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1

- 1)a) Montrer, pour tout réel $x \in [1; +\infty[$: $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$.
 b) En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.
- 2)a) Montrer, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$: $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.
 b) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge.
 c) Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n , pour $n \geq 2$

- 1)a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale K_n est convergente.
 b) Établir, pour tout entier $n \geq 2$: $|K_n| \leq \frac{1}{n-1}$
- 2)a) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
 b) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ converge ; on note ℓ sa limite.
 c) Établir, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $a \in]0; 1[$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a \quad \text{et} \quad \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n$$

(On pourra utiliser I.2.).

- d) En déduire, pour tout réel $a \in]0; 1[$: $0 \leq \ell \leq a$ et conclure : $\ell = 0$.
- 3)a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n est convergente.
 b) Établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général $I_n, n \geq 2$

- 1) Montrer, pour tout entier $p \geq 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0$.
- 2) En déduire, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1})$$

- 3) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser I.3.b.).

PROBLEME 2

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$. On note id_E l'application identique de E , et $\tilde{0}$ l'application nulle de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on note F^\perp le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E .

Le projecteur de E sur F parallèlement à F^\perp est appelé projecteur orthogonal sur F .

Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f , on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E , c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

- 1) Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.
- 2)a) Soient λ et μ deux valeurs propres de f .
Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

- b) En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.
- 3) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $k \geq 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k , on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

- 4) Soit x un vecteur de E .
 - a) Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$ -uplet (x_0, x_1, \dots, x_k) de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k$.
 - b) Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k , montrer : $p_j(x) = x_j$.
Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$id_E = p_0 + p_1 + \dots + p_k$$

- 5)a) Etablir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \implies p_i \circ p_j = \tilde{0}$$

- b) Montrer : $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k$.
- c) Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\text{Im } f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

On note f^\sharp l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \frac{1}{\lambda_1}p_1 + \frac{1}{\lambda_2}p_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_k}p_k$.

On dit que f^\sharp est l'inverse généralisé de f .

6)a) Montrer : $f \circ f^\sharp = p$.

b) En déduire : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) = p(y) \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f)$.

7) Soit y un vecteur de E .

a) Montrer : $\forall x \in E, (\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f)$

b) En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E . On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base \mathcal{B} .

1) Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2) Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base \mathcal{B} .

On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base \mathcal{B} .

3) Montrer : $A = 2M_1 + 4M_2$.

4)a) Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b) Montrer : $\forall x \in E, p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2$.

c) Déterminer la matrice M_2 .

5) En déduire la matrice associée à f^\sharp relativement à la base \mathcal{B} .