BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1[ère] épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \qquad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}\,.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\,.$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3.

2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.

4. a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0\,;\pi[$:

$$T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1\,;1[$, que l'on explicitera.

c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1} \right).$$

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0\,;\pi[$:

$$\sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)\,T_n(\cos\theta) = 0 \ .$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \longmapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta\,.$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(\mathrm{X}^2-1)\,T_n'' + 3\,\mathrm{X}\,T_n' - (n^2+2n)\,T_n = 0\ .$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geqslant 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré inférieur ou égal à n.
On note L l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (\mathrm{X}^2-1)P'' + 3\mathrm{X}P'\ .$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0,1,...,n\}$.

b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P,Q) de polynômes de E, associe le réel $\varphi(P,Q)$ défini par :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi\big(L(P),Q\big) = \varphi\big(P,L(Q)\big)\,.$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi\big(L(P),Q\big) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\;P'(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Établir que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

Deuxième problème

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \,]0\,;\pi]$:

$$\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(m+1)t}{2}} \quad , \text{ puis } \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{\pi} u(t) \sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Soit l'application $f : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ si $t \in \,]0\,;\pi]$, et $f(0) = -1$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$.

5.a. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\frac{(2m+1)t}{2}\, \mathrm{d}t$.

b. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1.a. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0\,;+\infty[)^2$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3.a. Établir : $\forall (x,y) \in \big([0\,;+\infty[\big)^2,\quad S(y) - S(x) = (y-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$

b. En déduire : $\forall (x,y) \in \big([0\,;+\infty[\big)^2,\quad |S(y) - S(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{6}\,|y-x|.$

c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0\,;+\infty[$.

4.a. Montrer, pour tout couple (x,y) de $\big([0\,;+\infty[\big)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in \,]0\,;+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\forall t \in [1\,;+\infty[,\quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\,.$$

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \varphi(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n),$

et en déduire : $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

c. Conclure : $\quad S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x.$

7.a. Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.