MATHÉMATIQUES I

Option Scientifique

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Le problème 1 porte sur l'analyse et les probabilités, et est composé de trois parties.

La partie I amène l'existence et le calcul de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$, pour a, b réels strictement positifs fixés. La partie II définit un produit scalaire sur un espace vectoriel de fonctions et utilise, dans la question 6, le résultat de la partie I. La partie III propose l'étude de densités de variables aléatoires réelles, et exploite le résultat de la partie I.

Le problème 2 porte sur l'algèbre linéaire, et propose l'étude de la notion de racine carrée d'une matrice carrée, dans des exemples ou sous certaines hypothèses.
La partie I, à l'aide de deux exemples, montre qu'il se peut qu'une matrice carrée réelle d'ordre deux ait une infinité de racines carrées ou n'en ait aucune. La partie II étudie le cas d'une matrice carrée de la forme $\mathrm{I}_n + N$ où N est nilpotente. La partie III étudie la cas d'une matrice carrée réelle d'ordre n, admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes. La partie IV étudie le cas d'une matrice symétrique positive.

Problème 1

Partie I

1. Dès cette première question, beaucoup trop de copies contiennent de grossières erreurs, dont les suivantes :

• Certaines copies ne soulèvent même pas le problème en 0

• On décompose l'intégrale de l'énoncé (qui sera convergente) en somme deux intégrales divergentes, à la borne 0

• f est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge

• $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge

• On oublie de signaler la positivité lors de l'utilisation du théorème de majoration ou du théorème d'équivalence

• On confond l'exemple de Riemann en 0 et celui en $+\infty$.

Pour l'étude en 0, la recherche de la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}$, est souvent fausse, par addition incorrecte d'équivalents, et lorsqu'il y a intervention d'un développement limité en 0, le traitement des $\ll o \gg$ est trop souvent faux ou incorrect.
Et que dire des copies qui débutent par la faute grossière : $\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b})$?

Quelques copies invoquent, hors de propos, la fonction Γ, et souvent $\Gamma(0)$, qui n'existe pas.

De manière générale, la notion de convergence pour les intégrales impropres n'est pas assimilée dans plus de la moitié des copies.

Les correcteurs ont été surpris de rencontrer dans quelques copies le mot ≪ impropreté ≫ au lieu de ≪ impropriété ≫, pour désigner le caractère d'une intégrale.

2.a. • La manipulation du dx et du dy lors du changement de variable est souvent fausse ou incompréhensible. Trop de copies se contentent de répéter l'énoncé, sans preuve, ce qui n'apporte rien.

• Des candidat(e)s croient, à tort, que les intégrales envisagées ici sont impropres et justifient inutilement leur convergence.

• Une distinction en cas selon la position des bornes est inutile.

2.b. L'intervention de la relation de Chasles n'est vue que dans une minorité de copies. Trop de copies se contentent, ici aussi, de répéter l'énoncé, en échangeant, sans explication, les bornes des intégrales.

3.a. Souvent résolue, mais quelquefois avec une erreur d'addition d'équivalents.

3.b. Le lien avec la question précédente, pourtant énoncé dans le sujet, n'est pas toujours vu.

3.c. Question facile, se déduisant des précédentes, et résolue dans la plupart des copies.

3.d. Trop de copies affirment, sans preuve, que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie II

1. • Quelques copies, heureusement peu nombreuses, affirment $E \subset \mathbb{R}$, ce qui dénote une incompréhension de la nature des objets mathématiques sous-jacents. Et on rencontre encore trop souvent la confusion entre $f(x)$ et f, du genre : $f(x) \in E$.

• La distinction entre $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$ laisse poindre des incompréhensions de fond sur les notations ensemblistes.

• Quelques copies confondent les études de $(\lambda f+g)(x)$ et de $f(\lambda x+y)$, cette dernière expression étant inadaptée au contexte. Ceci vient d'une confusion entre sous-espace vectoriel et application linéaire.

• Le caractère borné de $\lambda f + g$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$, est affirmé, mais rarement démontré, et, quand il l'est, il y a souvent erreur dans la manipulation des inégalités (produit), par oubli de valeurs absolues.

• L'utilisation des valeurs absolues est souvent inexistante ou incorrecte.

2. Question facile, destinée à mieux cerner la nature des éléments de E.

• Trop souvent, on écrit $f_1(x) \in E$ au lieu de $f_1 \in E$.

• Quelques grossières erreurs sur les valeurs des fonctions sin et cos en 0.

• Il ne suffit pas d'écrire $\lim\limits_{0} f_4 = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f_4 = 1$ pour établir que f_4 est bornée.

3.a. Le résultat se déduit de la définition de la dérivabilité en 0 et de la dérivée en 0. Le théorème des accroissements finis est inadapté au contexte.

3.b. On rencontre ici souvent les mêmes erreurs qu'en I-1. De plus :

• il y a souvent confusion entre majoration et équivalence

• on oublie les valeurs absolues, on oublie l'intervention de la convergence absolue.

Dans de nombreuses copies, on croit que tout élément f de E admet une limite finie en $+\infty$, ce qui est faux, comme le montre l'exemple de f_1.

4. Il ya trop d'oublis pour la définition d'un produit scalaire. La plupart des erreurs rencontrées dans les copies sont relatives à la positivité ou au caractère défini.
Pour la positivité, il y a quelquefois confusion entre $(f \mid f) \geqslant 0$ et $(f \mid g) \geqslant 0$.
Pour le caractère défini, il y a souvent oubli de la continuité de f.
Quelques candidat(e)s confondent f avec un polynôme et s'acharnent inutilement sur une infinité de points en lesquels f s'annule.

5. L'intégration par parties doit être faite sur un segment $[\varepsilon\,;X]$ tel que $0 < \varepsilon \leqslant X$, et non sur $[0\,;X]$, ou $]0\,;X]$, ou $]0\,;+\infty[$.
Après intégration par parties sur un segment, les limites du crochet sont souvent confuses.
Les correcteurs ont rencontré trop de fois l'erreur :

$$\frac{f(x)g(x)}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{f(0)g(0)}{x} = 0,$$

au lieu du raisonnement correct suivant :

$$\frac{f(x)g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x}g(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} f'(0)g(0) = 0.$$

6. Question facile et souvent abordée. Certaines copies font un lien avec f_4 (de II-2), mais ce lien n'est pas convaincant.

Partie III

1. • En général, à peu près bien traitée. Mais des copies oublient une ou des conditions de la définition d'une densité d'une variable aléatoire réelle.

• Il y a souvent une étude inutile, et parfois fausse, de la continuité de v en 0.

2. Le résultat est attendu sous sa forme la plus simplifiée.
L'oubli du coefficient $\ln 4$ au dénominateur est fréquent.

3.a. • Le caractère C^0 ou C^1 est trop oublié.

• Des copies contiennent des manipulations incorrectes des racines carrées.
L'événement $[\sqrt{X} < x]$ n'est pas traduit correctement.

• Il y a une erreur de calcul fréquente dans la dérivation de la fonction composée $x \longmapsto v(x^2)$.

3.b. Rarement abordée, seulement dans les très bonnes copies.

Problème 2

Partie I

1. • Certain(e)s candidat(e)s ne savent pas que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

• Le caractère infini n'a été établi que dans quelques très rares copies.

2. Les correcteurs ont souvent rencontré la déduction grossièrement fausse suivante :
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

Partie II

1. Beaucoup de fautes de calcul. Dans plus d'un tiers des copies, le résultat correct n'est pas obtenu.

2. Question rarement abordée, et, quand elle l'est, la solution proposée est souvent fausse.

3. Les correcteurs ont trop souvent rencontré une addition incorrecte entre un nombre réel et une matrice carrée, par exemple $1 + N$ (qui n'est pas défini) au lieu de $\mathrm{I}_n + N$.

Partie III

1.a. • Souvent bien traitée, mais, dans quelques copies, il y a incompréhension de la notion de sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.

• Il y a quelquefois intervention (d'ailleurs inutile) de $\dfrac{1}{\lambda}$, et alors souvent oubli de l'examen du cas $\lambda = 0$.

1.b. Rarement traitée, l'intervention de la dimension 1 des sous-espaces propres n'étant pas comprise.

1.c. Convenable, en général.

2.a. Bien vue dans presque toutes les copies. Il s'agit simplement de citer le cours.

2.b. Il y a quelquefois utilisation d'une notation $D^{1/2}$. Cette notation n'étant pas présente dans l'énoncé, son sens dans le contexte doit être défini par le rédacteur, pour être prise en compte. De plus, cette notation suppose une unicité.
Il y a assez souvent confusion entre Δ et B.

2.c. L'intervention du résultat de **1.c** est rarement vue. Il y a quelquefois confusion entre la matrice R et la matrice $P\Delta P^{-1}$ obtenue en **b**.

2.d. Rarement traitée.

Partie IV

1. • Le résultat est trop souvent affirmé sans justification.

• On oublie quelquefois la condition $X \neq 0$, si X est un vecteur propre.

• Dans quelques copies, il y a confusion entre la norme et le carré de la norme.

2. Bien vue dans beaucoup de copies. Il s'agit simplement de citer le cours.

3. Des copies oublient de montrer la symétrie ou la positivité.

4.a. Il y a quelquefois de grossières erreurs sur la nature des matrices envisagées, par exemple, l'écriture R^2X^2, qui est aberrante, puisque X est une matrice-colonne. Mais, à part cette erreur, les autres copies qui abordent la question la traitent correctement.

4.b. • Le caractère direct des sommes n'est pas ou est mal justifié.

• Dans quelques copies, on confond somme et réunion.

4.c. à **f.** Questions rarement abordées, mais alors bien traitées.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, intéressant et varié, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, de difficulté graduée, couvrant une très large partie des connaissances exigibles, dont la longueur est satisfaisante au regard de l'objectif d'offrir une large palette d'expression des candidat(e)s (programme de probabilités compris), et adapté au niveau des candidat(e)s.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager.

Les correcteurs sont unanimes à signaler une nette baisse du niveau des copies par rapport aux années précédentes. Le cours semble moins bien su, même en ce qui concerne les notions de base, ce qui apparaît dans les copies dès la première question du problème 1.

La présentation des copies semble aussi moins soignée.

L'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation ne sont pas toujours respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant, et de séparer nettement les questions. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé, mais le niveau général est en baisse.

Moyenne de l'épreuve: 9,77 / 20.