

# ESCP-EAP

---

## OPTION ÉCONOMIQUE

### MATHÉMATIQUES III

Jeudi 15 mai 2003, de 8h à 12h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

#### EXERCICE

Soit  $a, b$  deux entiers naturels non nuls et  $s$  leur somme.

Une urne contient initialement  $a$  boules noires et  $b$  boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours  $s$  boules.

On désigne par  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note :

- $B_n$  l'événement « la  $n$ -ième boule tirée est blanche » ;
- $X_n$  la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des  $n$  premiers tirages ;
- $u_n$  l'espérance de la variable aléatoire  $X_n$ , c'est-à-dire  $u_n = \mathbf{E}(X_n)$ .

#### 1. Étude d'un ensemble de suites

Soit  $A$  l'ensemble des suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s x_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$$

- Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels et  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha n + \beta$ .  
Déterminer en fonction de  $b$  et de  $s$  les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  appartienne à  $A$ .
- Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite appartenant à  $A$ ,  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite déterminée à la question précédente et  $(y_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$ .  
Montrer que la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $y_n$  puis  $x_n$  en fonction de  $x_1, b, s$  et  $n$ .

## 2. Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de $u_n$

- a) Donner, en fonction de  $b$  et de  $s$ , les valeurs respectives de la probabilité  $\mathbf{P}(B_1)$  et du nombre  $u_1$ .
- b) Calculer la probabilité  $\mathbf{P}(B_2)$  et vérifier l'égalité :  $\mathbf{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$ .
- c) Soit  $n$  un entier naturel vérifiant  $1 \leq n \leq a$ . Montrer que, pour tout entier  $k$  de l'intervalle  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , la probabilité conditionnelle  $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k])$  est égale à  $\frac{b+n-k}{s}$ .

En déduire l'égalité :  $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$ .

- d) Soit  $n$  un entier naturel vérifiant  $n > a$ .

Si  $k$  est un entier de l'intervalle  $\llbracket 0, n-a-1 \rrbracket$ , quel est l'événement  $[X_n = k]$  ?

Si  $k$  est un entier de l'intervalle  $\llbracket n-a, n \rrbracket$ , justifier l'égalité :  $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k]) = \frac{b+n-k}{s}$ .

Montrer enfin que l'égalité  $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$  est encore vérifiée.

## 3. Calcul des nombres $u_n$ et $\mathbf{P}(B_n)$

- a) Soit  $n$  un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier  $k$  de l'intervalle  $\llbracket n+1-a, n \rrbracket$ , l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s} \mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s} \mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour  $k = n+1$ ,  $k = n-a$  et pour tout entier  $k$  de l'intervalle  $\llbracket 1, n-a-1 \rrbracket$ .

- b) Calculer, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et de  $n$ . En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  appartient à l'ensemble  $A$  étudié dans la question 1.
- c) Donner, pour tout entier naturel  $n$  non nul, les valeurs de  $u_n$  et de  $\mathbf{P}(B_{n+1})$  en fonction de  $b$ ,  $s$  et  $n$ .
- d) Quelles sont les limites des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(\mathbf{P}(B_n))_{n \geq 1}$  ?

## PROBLÈME

Dans tout le problème, on désigne par  $\mathcal{C}$  l'espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . À toute application  $f$  de  $\mathcal{C}$ , on associe l'application  $D(f)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

Les parties  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont indépendantes.

**Question préliminaire :**  $D$  est-il un endomorphisme de  $\mathcal{C}$  ?

## Partie A : Image par $D$ d'une fonction de répartition

1. Soit  $F$  une application de  $\mathcal{C}$ . Rappeler les propriétés que doit posséder  $F$  pour être considérée comme une fonction de répartition.
2. Soit  $F$  une application de  $\mathcal{C}$  qui est une fonction de répartition et  $g$  l'application  $D(F)$ .
- a) Montrer que  $g$  est positive.

- b) Prouver, pour tout réel  $x$ , la double inégalité :  $F(x) \leq \int_x^{x+1} F(t) dt \leq F(x+1)$ .

En déduire que les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{x+1} F(t) dt$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} F(t) dt$  existent et préciser leurs valeurs.

- c) Soit  $A$  et  $B$  deux réels vérifiant  $A < 0 < B$  et  $I(A, B)$  l'intégrale :  $I(A, B) = \int_A^B g(t) dt$ .

Justifier l'égalité :  $I(A, B) = \int_B^{B+1} F(t) dt - \int_A^{A+1} F(t) dt$ .

- d) Prouver alors soigneusement que  $g$  est une densité de probabilité.

### 3. Un exemple

On suppose, dans cette question, que  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et on pose :  $g = D(F)$ .

Déterminer  $g(x)$  pour tout réel  $x$ , en distinguant les cas  $x < -1$ ,  $-1 \leq x < 0$ ,  $0 \leq x < 1$  et  $1 \leq x$ . Représenter graphiquement l'application  $g$ .

## Partie B : Recherche des valeurs propres de $D$

Si  $\lambda$  est un réel, on dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $D$  s'il existe une application  $f$  de  $\mathcal{C}$ , distincte de l'application nulle, vérifiant :  $D(f) = \lambda f$ .

1. Soit  $a$  un réel. On note  $g_a$  l'application de  $\mathcal{C}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{ax}$ .  
Déterminer l'application  $D(g_a)$ .
2. En déduire que tout réel  $\lambda$  strictement supérieur à  $-1$  est une valeur propre de  $D$ .
3. Soit  $a$  un réel. On note  $h_a$  l'application de  $\mathcal{C}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = \sin(\pi x) e^{ax}$ .  
Déterminer l'application  $D(h_a)$ .
4. En déduire que tout réel  $\lambda$  strictement inférieur à  $-1$  est une valeur propre de  $D$ .
5. Le réel  $-1$  est-il une valeur propre de  $D$  ?

## Partie C : Image par $D$ d'une application polynomiale

Pour tout entier naturel  $p$ , on désigne par  $E_p$  le sous-espace de  $\mathcal{C}$  dont les éléments sont les applications polynomiales de degré au plus  $p$ .

On note  $X$  l'application  $x \mapsto x$  et, pour tout entier naturel non nul  $k$ , on note  $X^k$  l'application  $x \mapsto x^k$ .

Soit  $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la suite d'applications polynomiales définie par :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X - k)$$

1. Préciser  $H_1, H_2, H_3$  et montrer que  $\mathcal{U}_3 = (H_0, H_1, H_2, H_3)$  est une base de  $E_3$ .
2. Soit  $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$  la base canonique de  $E_3$ .
  - a) Écrire la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}_3$  à la base  $\mathcal{U}_3$  et calculer la matrice  $P^{-1}$ .
  - b) Soit  $a_0, a_1, a_2, a_3$  des réels et  $Q$  l'application polynomiale  $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ .  
Quelles sont les coordonnées de  $Q$  dans la base  $\mathcal{U}_3$  ?  
En particulier, vérifier l'égalité :  $X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3$ .

### 3. Application : moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire de Poisson

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $a$ .

- a) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on pose :  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^3 a^k}{k!}$ .  
Transformer  $S_n$  à l'aide de la relation :  $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = H_1(k) + 6H_2(k) + 6H_3(k)$ .  
En déduire que la série de terme général  $\frac{n^3 a^n}{n!}$  est convergente et préciser  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 a^n}{n!}$ .
- b) En déduire que la variable aléatoire  $Z$  admet un moment d'ordre 3 donné par :

$$\mathbf{E}(Z^3) = a + 3a^2 + a^3$$

4. Dans cette question,  $p$  est un entier naturel non nul fixé.

- a) Montrer que, si  $Q$  appartient à  $E_p$ ,  $D(Q)$  appartient aussi à  $E_p$ .  
On note alors  $D_p$  l'endomorphisme de  $E_p$  qui, à tout  $Q$  de  $E_p$ , associe  $D(Q)$ .
- b) Montrer que la famille  $\mathcal{U}_p = (H_0, H_1, \dots, H_p)$  est une base de  $E_p$ .
- c) Déterminer  $D_p(H_0), D_p(H_1)$  et prouver, pour tout entier  $i$  vérifiant  $0 < i \leq p$ , l'égalité :  $D_p(H_i) = H_{i-1}$ .

d) Écrire la matrice  $M_p$  représentative de  $D_p$  dans la base  $\mathcal{U}_p$ .

e) Préciser la ou les valeurs propres de  $M_p$ . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

**5. Application : moment d'ordre  $p$  d'une variable aléatoire de Poisson**

Soit  $p$  un entier naturel non nul fixé et  $b_0, b_1, \dots, b_p$  les réels vérifiant

$$X^p = b_0 H_0 + b_1 H_1 + \dots + b_p H_p$$

Par une méthode analogue à celle de la question **3.**, montrer que la variable aléatoire  $Z$  définie dans la question **3.** admet un moment d'ordre  $p$  donné par  $\mathbf{E}(Z^p) = \sum_{i=0}^p \frac{b_i a^i}{i!}$ .

**6.** Dans cette question,  $p$  est un entier naturel non nul et, pour tout entier  $i$  vérifiant  $0 \leq i \leq p$ , on considère l'application  $\varphi_i$  de  $E_p$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout élément  $Q$  de  $E_p$ , associe le réel :

$$\varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_i^k Q(k)$$

où  $C_i^k$  désigne le coefficient binomial d'indices  $i$  et  $k$ .

a) Montrer que, pour tout entier  $i$  vérifiant  $0 \leq i \leq p$ , l'application  $\varphi_i$  est linéaire.

b) Soit  $i$  et  $j$  deux entiers vérifiant  $0 \leq i \leq p$  et  $0 \leq j \leq p$ ; établir les égalités :

$$\varphi_i(H_i) = 1 \quad \text{et si } j \neq i, \quad \varphi_i(H_j) = 0$$

c) En déduire, pour tout entier  $i$  vérifiant  $0 \leq i \leq p$ , la relation :  $b_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_i^k k^p$ .