ESCP-EAP 2003. math 1, option S

Dans tout le problème, on considère un entier naturel p supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel q, on note $\mathbb{R}_q[X]$ (resp. $\mathbb{C}_q[X]$ l'espace vectoriel réel (resp. complexe) des polynômes à coefficients réels (resp. complexes) de degré au plus égal à q. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

On note $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$) l'espace vectoriel réel (resp. complexe) des suites réelles (resp. complexes).

Préliminaire

On considère la fonction réelle f qui à tout réel x positif ou nul associe $f(x) = x^p - x^{p-1} - 1$.

1)a) Donner le tableau de variation de la fonction f .

b) En déduire les résultats suivants :

- la fonction f s'annule une seule fois en un réel noté C qui est strictement supérieur à 1.
- pour tout réel x positif ou nul, le réel $f(x)$ est strictement positif si et seulement si x est strictement supérieur à C.

2) Dans le cas particulier où l'entier p est égal à 4, comparer C et $\dfrac{3}{2}$.

Partie I

On rappelle que si a est un nombre complexe et $Q(X)$ un polynôme à coefficients complexes alors le polynôme $Q(X)$ est divisible par $X - a$ si et seulement si le complexe $Q(a)$ est nul.

1) Soit a un nombre complexe, n un entier naturel au moins égal à 2 et $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n s'écrivant $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$.

a) Établir l'égalité : $P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$ où $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} X^i\Big)$.

b) En déduire que le polynôme $P(X) - P(a)$ est divisible par $(X - a)^2$ si et seulement si le nombre complexe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k a^{k-1}$ est nul.

c) À quelle condition nécessaire et suffisante le nombre complexe a est-il racine au moins double du polynôme $P(X)$?

2) Montrer que le polynôme $X^p - X^{p-1} - 1$ a p racines simples dans $\mathbb{C}$ et qu'elles sont toutes non nulles. Ces racines seront notées $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ avec la convention que Z_p est égal à C.

3)a) Établir, pour tout couple (x, y) de nombres complexes, l'inégalité : $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Quand a-t-on l'égalité ?

b) Établir, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, l'inégalité : $|Z_k| \leqslant C$.

c) Montrer que si k est un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, l'égalité $|Z_k| = C$ n'a lieu que si k est égal à p.

4) Soit θ l'application de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{C}^p$ qui à tout polynôme complexe $P(X)$ de degré au plus égal à $p - 1$ associe l'élément $\big(Z_1P(Z_1), Z_2P(Z_2), \ldots, Z_pP(Z_p)\big)$ de $\mathbb{C}^p$.

a) Montrer que l'application θ est un isomorphisme.

b) En déduire que, pour tout élément $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de $\mathbb{C}^p$, il existe un unique élément $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ de $\mathbb{C}^p$ vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \cdots + \lambda_p Z_p = u_1 \\ \lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \cdots + \lambda_p Z_p^2 = u_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \lambda_1 Z_1^p + \lambda_2 Z_2^p + \cdots + \lambda_p Z_p^p = u_p \end{cases}$$

5) On note F l'espace vectoriel complexe des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout entier n strictement supérieur à p, l'égalité $u_n = u_{n-1} + u_{n-p}$. Autrement dit, on a :

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}};\ \forall n > p \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-p}\}$$

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des suites complexes.

b) Montrer que, pour tout entier k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant p$, la suite géométrique $(Z_k^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est élément de F.

c) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite élément de F et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ l'unique solution du système

$$\begin{cases} \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \cdots + \lambda_p Z_p = u_1 \\ \lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \cdots + \lambda_p Z_p^2 = u_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \lambda_1 Z_1^p + \lambda_2 Z_2^p + \cdots + \lambda_p Z_p^p = u_p \end{cases}$$

On note $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite complexe de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k Z_k^n$.

Montrer que les suites u et v sont égales.

d) Montrer que $\Big((Z_1^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (Z_2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \dots, (Z_p^n)_{n\in\mathbb{N}^*}\Big)$ est une base de F.

Partie II

1) Pour tout entier naturel q, on considère l'application Φ_q de $\mathbb{R}_q[X]$ dans lui-même qui à tout polynôme $A(X)$ de $\mathbb{R}_q[X]$ associe le polynôme : $\Phi_q\big(A(X)\big) = A(X) - A(X-1) - A(X-p)$. Montrer que l'application Φ_q est un automorphisme de $\mathbb{R}_q[X]$.

2) Soit $Q(X)$ un polynôme à coefficients réels. On note E_Q l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout entier n strictement supérieur à p, l'égalité :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n).$$

Autrement dit, on a :

$$E_Q = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}};\quad \forall n > p \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n)\}$$

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels, noté $A_0(X)$, tel que la suite $\big(A_0(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est élément de E_Q.

b) Prouver qu'une suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est élément de E_Q si et seulement si la suite $\big(u_n - A_0(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à l'espace vectoriel F défini dans la question **I-5**).

c) En déduire que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de E_Q, il existe un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :

$$u_n = \alpha_1 Z_1^n + \alpha_2 Z_2^n + \cdots + \alpha_{p-1} Z_{p-1}^n + \alpha_p C^n + A_0(n).$$

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite **réelle** élément de E_Q. Déduire des questions précédentes que, soit il existe un réel α non nul tel que $u_n \sim \alpha C^n$, soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est négligeable devant la suite $(C^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ c'est-à-dire $u_n = \mathrm{o}(C^n)$.

3) Soit $Q(X)$ un polynôme à coefficients réels. On note I_Q l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout entier n strictement supérieur à p, l'inégalité :

$$u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n).$$

Autrement dit, on a :

$$I_Q = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_{\mathcal{R}};\quad \forall n > p \quad u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n)\}$$

a) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle élément de F et à termes **strictement positifs**. Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, on pose $v_{a,n} = a w_n + A_0(n)$ et on note v_a la suite $(v_{a,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de I_Q, il existe un réel a tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité : $u_n \leqslant v_{a,n}$.

b) Justifier l'existence d'une suite réelle élément de F et à termes **strictement positifs**. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle élément de I_Q et à termes **positifs ou nuls** alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par la suite $(C^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ c'est-à-dire $u_n = O(C^n)$.

Partie III

Pour tout entier naturel n au moins égal à 2, on note T_n, ou plus simplement T, l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ des entiers compris entre 1 et n. Pour toute partie A de T on note $\operatorname{Card} A$ le nombre d'éléments de A.

On considère une matrice $M = (\alpha_{ij})_{l\leqslant i,j\leqslant n}$ carrée d'ordre n, **symétrique**, dont les coefficients valent 0 ou 1, les coefficients diagonaux étant nuls (on dit que M est une matrice **d'incidence** d'ordre n). On a donc :

$$\Big(\forall (i,j)\in T^2 \quad (\alpha_{ij}=0 \text{ ou } \alpha_{ij}=1)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\forall i\in T \quad \alpha_{ii}=0\Big)$$

Pour tout couple (i,j) d'éléments de T on dit que i et j sont voisins si $\alpha_{ij}=1$. Pour toute partie non vide A de T et tout élément i de A on note $A(i)$ l'ensemble des éléments de A voisins de i et on dit que $A(i)$ est l'ensemble des voisins de i dans A ; autrement dit, on a : $A(i) = \{j\in A; \alpha_{ij}=1\}$.

Une partie non vide S de T est dite stable si, pour tout élément i de S, $S(i)$ est vide. *On remarquera que les singletons de T sont stables.*

Pour toute partie non vide A de T, on appelle nombre de stabilité de A relativement à M et on note $\omega(A,M)$, le maximum des cardinaux des parties stables incluses dans A, et on pose $\omega(\emptyset, M) = 0$.

1) Dans cette question, on suppose que $n=4$ et que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $A(1)$ et $\omega(A,M)$ pour $A=\{1,3,4\}$.

b) Déterminer le nombre $\omega(T,M)$.

2) Dans le cas particulier où $M=(\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice dont les coefficients vérifient les conditions :

$$\alpha_{ij}=1 \quad \text{si} \quad |i-j|=1 \quad \text{et} \quad \alpha_{ij}=0 \quad \text{sinon,}$$

déterminer le nombre $\omega(T,M)$.

L'objet des questions suivantes est l'étude de la complexité de deux algorithmes de calcul du nombre de stabilité de T relativement à M, la complexité d'un tel algorithme étant définie comme étant le nombre maximum de « lectures » de coefficients de la matrice M que nécessite, dans le pire des cas (suivant les valeurs de M), l'exécution de cet algorithme.

3) Un algorithme « naïf » consiste à examiner, une à une, les parties à au moins deux éléments de T, supposées rangées selon un ordre décroissant de leur cardinal (ce rangement étant indépendant de M), jusqu'à rencontrer une partie stable (et c'est ce test qui nécessite des lectures dans M) ; bien entendu, si aucune partie stable n'a été rencontrée, $\omega(T,M)$ vaut 1.

a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^2$.

b) Montrer que, pour tout entier n au moins égal à 2, la complexité de l'algorithme « naïf » est supérieure ou égale à $2^n-(n+1)$ et inférieure ou égale à $\mathrm{C}_n^2 2^{n-2}$.

4) Soit A une partie non vide de T.
Montrer que, pour tout élément i de A, on a l'égalité :

$$\omega(A,M) = \max\Big(\omega(A\setminus\{i\}, M), 1+\omega\Big(A\setminus\big(\{i\}\cup A(i)\big), M\Big)\Big)$$

5) On suppose données, en langage Pascal,

• une déclaration de constante permettant de stocker la valeur de l'entier n, la déclaration du type `tab` permettant de stocker les parties de T, et la déclaration du type `matrice` permettant de stocker les matrices d'incidence d'ordre n ;

• une fonction d'en-tête

```
function Appartient (i : integer ; A : tab) : boolean ;
```

qui renvoie la valeur `true` si l'élément i est dans la partie A et la valeur `false` sinon.

a) Écrire, en langage Pascal, une fonction d'en-tête :

```
function Recherche (A: tab ; M: matrice): integer ;
```

qui renvoie le plus petit des éléments i de A pour lequel $\operatorname{Card} A(i)$ est supérieur ou égal à 3 si un tel plus petit élément existe et qui renvoie 0 sinon.

b) Évaluer le nombre maximum de « lectures » de coefficients de la matrice M que nécessite cette fonction quand elle est appliquée à la partie A.

6) **On admet** qu'il est possible de concevoir une fonction, notée $\mathit{Deux}(A, M)$ renvoyant, lorsque, pour tout élément i de A, $\operatorname{Card} A(i)$ est inférieur ou égal à 2, le nombre $\omega(A, M)$ avec une complexité inférieure ou égale à $(\operatorname{Card} A)^2$.

On considère maintenant la suite d'instructions *Omega* dont on admet qu'elle permet récursivement, quand elle est appliquée à la partie A de T, d'obtenir la valeur de $\omega(A, M)$:

DÉBUT

• Exécuter $\mathit{Recherche}(A, M)$;

• Si on a obtenu un élément i de A tel que $\operatorname{Card}(A(i)) \geqslant 3$ alors

Exécuter *Omega* pour la partie $A \setminus \{i\}$ afin d'obtenir $a = \omega\big(A \setminus \{i\}\,, M\big)$;

Exécuter *Omega* pour la partie $A \setminus \big(\{i\} \cup A(i)\big)$ afin d'obtenir $b = \omega\Big(A \setminus \big(\{i\} \cup A(i)\big), M\Big)$

Calculer $\max(a, 1 + b)$ (qui est la valeur de $\omega(A, M)$ cherchée)

Sinon exécuter $\mathit{Deux}(A, M)$ pour obtenir $\omega(A, M)$;

FIN

On note u_n la complexité de cet algorithme lorsqu'il est appliqué à $A = T$.
Justifier, pour tout entier n au moins égal à 6, l'inégalité : $u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n-4} + 2n^2$.

7) Comparer, pour de grandes valeurs de l'entier n, les complexités de l'algorithme « naïf » et de l'algorithme récursif.