CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 20 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l''utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème l'espérance d'une variable aléatoire Y sera notée $\mathbb{E}(Y)$.
Tous les polynômes de ce problème sont à coefficients réels.

Pour tout entier naturel k, on note E_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k.
À tout entier naturel n non nul et à toute suite $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ de $2n+1$ réels, on associe les applications Φ_n et S_n définies de la manière suivante :
pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$ avec $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $B = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, on pose

$$\Phi_n(A,B) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} a_i b_j s_{i+j}$$

et, pour tout polynôme C élément de E_{2n}, avec $C = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$, on pose $S_n(C) = \sum_{i=0}^{2n} c_i s_i$.

1) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.
   b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, S_n est une forme linéaire sur E_{2n} et, pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$, prouver l'égalité : $\Phi_n(A,B) = S_n(AB)$ (*on commencera par considérer le cas où* $A = X^i$ *et* $B = X^j$ *avec* $0 \leqslant i, j \leqslant n$.)

2) Deux cas particuliers

a) Dans cette sous-question on suppose que $n = 1$ et $s_0 = 1$, s_1 et s_2 étant quelconques. Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = (b + as_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur les réels s_1 et s_2, pour que l'application Φ_1 soit un produit scalaire sur $E_1 \times E_1$.

b) Dans cette sous-question on suppose que $n = 2$, $s_0 = 1$ et $s_1 = s_3 = 0$, s_2 et s_4 étant quelconques. Prouver que l'application Φ_2, associée à un tel choix de $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$, est un produit scalaire sur $E_2 \times E_2$ si et seulement si les réels s_2 et s_4 vérifient les conditions suivantes : $s_2 > 0$ et $s_4 - s_2^2 > 0$.

3) Deux exemples

Dans cette question on considère un entier naturel n non nul.

a) Dans cette sous-question, on se donne un entier naturel d non nul et une variable aléatoire discrète Y, prenant d valeurs distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$, avec les probabilités, strictement positives, respectives $p_1, p_2, \ldots, p_d$, et on pose, pour tout entier naturel k :

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^k p_i$$

On considère les applications Φ_n et S_n associées à ce choix de $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$.

i) Pour tout polynôme Q de E_{2n}, vérifier l'égalité : $S_n(Q) = \sum_{i=1}^{d} Q(\alpha_i)p_i$.

ii) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d, pour que l'application Φ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

b) i) Dans cette sous-question, on considère une variable aléatoire Y dont une densité f est continue sur le segment $[0, 1]$ et nulle en dehors de $[0, 1]$. On pose, pour tout entier naturel k,

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \int_0^1 t^k f(t)\, dt$$

Vérifier que l'application Φ_n, associée à ce choix de $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$, est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

ii) Montrer que, dans le cas où $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n}) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{2n+1}\right)$, l'application Φ_n, associée à ce choix, est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

4) Dans cette question on revient au cas général où on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de $2n + 1$ réels et les applications Φ_n et S_n associées à cette suite.

On admet le résultat suivant : tout polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \zeta_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{l} (X^2 + b_j X + c_j)$$

où r et l sont des entiers naturels (avec la convention que si r ou l est nul, le produit correspondant vaut 1), où λ est un réel, où, si r est non nul, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ sont les racines réelles distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$, et où, si l est non nul, $b_1, b_2, \ldots, b_l, c_1, c_2, \ldots, c_l$ sont des réels vérifiant $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant l$.

Un polynôme **non nul** P, à coefficients réels, est dit **positif** si, pour tout réel x, $P(x) \geqslant 0$.

a) Montrer que la multiplicité d'une racine réelle d'un polynôme positif est paire.

b) Montrer que tout polynôme P positif de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple (A, B) de polynômes, tel que $P = A^2 + B^2$.

c) En remarquant que, si A, B, C, D sont quatre polynômes, on a :

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC+BD)^2 + (AD-BC)^2$$

montrer que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.

d) Montrer que Φ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme P positif, élément de E_n, on a : $S_n(P) > 0$.

5) Dans cette question on suppose que $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.

a) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire, à partir de la base $(1, X, X^2)$, une base orthonormale de E_2 pour le produit scalaire Φ_2.

b) Pour tous (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2), éléments de $\mathbb{R}^3$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tA\,M\,B$$

où $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer une matrice T triangulaire telle que : ${}^tTMT = I_3$ (I_3 désignant la matrice identité d'ordre 3).

6) Jusqu'à la fin du problème, on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$, de premier terme $s_0 = 1$, telle que Φ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$, et on note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base orthonormale de E_n pour le produit scalaire Φ_n obtenue, par le procédé de Schmidt, à partir de la base $(1, X, \ldots, X^n)$, le polynôme P_i étant de degré i pour tout entier i compris entre 0 et n.

a) En considérant le nombre $\Phi_n(P_n, 1)$, prouver que le polynôme P_n ne peut pas garder un signe fixe sur $\mathbb{R}$. En déduire que P_n possède au moins une racine réelle de multiplicité impaire.

b) On note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines réelles de P_n de multiplicité impaire. Montrer que P_n s'écrit sous la forme, $P_n = \varepsilon Q \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)$, où ε est élément de $\{-1, 1\}$ et Q est un polynôme positif de E_n.

En considérant le nombre $\Phi_n\left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)\right)$, montrer que $k = n$.

7) On note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines du polynôme P_n, réelles et distinctes deux à deux selon la question précédente.

Pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note L_k le polynôme $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.

a) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et, pour tout polynôme R de E_{n-1}, justifier l'égalité : $R = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i) L_i$. En déduire $\sum_{i=1}^{n} L_i$.

b) Soit A un polynôme, élément de E_{2n-1}.

i) Justifier l'existence d'un couple (Q, R) élément de $E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que $A = P_nQ + R$.

ii) Vérifier que $S_n(A) = S_n(R)$, puis que $S_n(A) = \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) S_n(L_i)$.

c) Pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $p_k = S_n(L_k)$.

Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et, en considérant $S_n(L_k^2)$, montrer que $p_k > 0$.

d) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Y vérifiant, pour tout élément k de $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, $s_k = \mathbb{E}(Y^k)$.

e) Déterminer la loi d'une telle variable aléatoire, dans le cas où $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.