

MATHEMATIQUES S (épreuve n° 280)

ANNEE 2011

Epreuve conçue par H E C

Voie Scientifique

	NBRE CANDIDATS	MOYENNES	ECARTS-TYPE
RESULTATS GLOBAUX	2 494	10,22	4,71

VOIES PREPARATOIRES			
Scientifique	2 494	10,22	4,71

ECOLES UTILISATRICES			
HEC	2 186	10,74	4,63
ESCP-EUROPE	2 466	10,27	4,71
ENSAE	323	12,43	4,86

Le sujet

L'épreuve de cette année accordait une place particulièrement importante au programme d'algèbre linéaire et, dans une moindre mesure, à celui d'algèbre bilinéaire. Le sujet faisait également appel à des connaissances élémentaires sur les nombres complexes.

Le thème du problème avait pour objet la démonstration d'un théorème de Perron-Frobenius datant du début du 20^{ème} siècle dont les applications sont diverses ; ainsi, le problème étudiait les relations entre les valeurs propres de module maximal d'une matrice et la limite éventuelle de la suite des puissances entières de cette matrice.

Ces relations, appliquées aux matrices positives et strictement positives, interviennent notamment dans la théorie des processus markoviens et dans les questions relatives à l'existence et la stabilité de l'équilibre général d'une économie (vecteur-prix strictement positif, conditions d'inversion d'une matrice de Leontiev, etc.).

Le sujet couvre une partie délicate du programme de l'option S et les résultats obtenus font appel peu de calculs mais à des raisonnements très fins.

La partie I proposait de découvrir à partir de deux exemples, les relations entre rayon spectral et norme d'une matrice.

Dans la partie II, on précisait une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une suite de matrices carrées réelles d'ordre p vers la matrice nulle d'ordre p .

La partie III était consacrée à la mise en évidence de quelques propriétés essentielles entre le rayon spectral et les coefficients d'une matrice positive.

La partie IV, plus imposante, étudiait les propriétés des matrices strictement positives et proposait une démonstration du théorème de Perron-Frobenius.

Enfin, la partie V proposait un algorithme de calcul du rayon spectral et d'un vecteur propre associé pour une matrice strictement positive et symétrique.