



**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P. - E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

**MATHEMATIQUES II**

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'objet du problème est l'étude de quelques aspects de la théorie classique du risque dont le contexte et les notations sont introduits au fur et à mesure.

Dans tout le problème, on considère deux suites de variables aléatoires réelles  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ , vérifiant les conditions suivantes :

- i) les variables aléatoires  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  sont indépendantes,
- ii) les variables aléatoires  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$  sont **strictement** positives et ont toutes la même densité égale sur  $]0, +\infty[$  à la densité d'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à 1,
- iii) les variables aléatoires  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  ont toutes la même densité qu'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à  $c$ .

On pose  $T_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $T_n$  la variable aléatoire définie par :

$$T_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

On observera que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et que, pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité :  $\Delta_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ .

On notera  $\mathbf{E}(X)$  l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ .

**Partie I Étude d'une variable aléatoire**

1) Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $T_n$ .

2) Soit  $t$  un réel positif ou nul.

a) Pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à  $t$ , justifier l'inclusion entre événements :

$$[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geq n - t]$$

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([T_n < t])$ .

c) En déduire que l'événement  $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$  est de probabilité nulle.

3) Soit  $t$  un réel positif ou nul. Étant donné un élément  $\omega$  de  $\Omega$ , on note  $N(t)(\omega)$  le plus grand élément de l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N}; T_n(\omega) \leq t\}$  (qui contient 0) si cet ensemble est fini, et  $N(t)(\omega) = 0$  sinon.

On observera que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $N(t)$  est égal à  $n$  si et seulement si :  $T_n \leq t < T_{n+1}$ .  
Montrer que l'application  $N(t)$  est une variable aléatoire réelle vérifiant :  $\mathbf{P}(\{N(t) = 0\}) = \mathbf{P}(\{T_1 > t\})$ .

4) a) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire  $T_n$ .

b) Soit  $t$  un réel strictement positif. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, justifier l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

En déduire l'égalité :  $\mathbf{P}(\{N(t) \leq n\}) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!}$ .

c) Pour tout réel  $t$  positif ou nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire  $N(t)$ .

## Partie II Étude de la probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

Dans cette partie on considère deux réels  $a$  et  $r$ ,  $r$  étant strictement positif et, pour tout réel positif  $t$ , on note  $K_a(t)$  la variable aléatoire définie par l'égalité :  $K_a(t) = a + rt - \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$  en convenant que la somme  $\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$  est nulle lorsque  $N(t)$  est nul.

En particulier,  $K_a(T_0) = K_a(0) = a$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul, puisque  $N(T_n) = n$ ,

$$K_a(T_n) = a + rT_n - \sum_{i=1}^n C_i$$

Par exemple,  $K_a(t)$  pourrait représenter le capital (aléatoire) au temps  $t$  d'une compagnie d'assurance disposant d'un capital initial (de montant  $a$  éventuellement négatif), percevant des primes (de montant égal à  $r$  par unité de temps), et indemnisant des assurés victimes de sinistres de coûts aléatoires (les  $C_i$ ) survenant à des dates elles-mêmes aléatoires (les  $T_i$ ).

Dans cette partie, le réel  $a$  étant fixé, la variable aléatoire  $K_a(t)$  sera notée plus simplement  $K(t)$ .

1) a) Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire  $-r\Delta_1$ .

b) Déterminer une densité de probabilité  $f$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , de la variable aléatoire  $L_1 = C_1 - r\Delta_1$ .

c) En déduire l'expression de la fonction de répartition  $F$  de la variable  $L_1$  puis l'égalité :

$$\mathbf{P}(\{K(T_1) < 0\}) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{c+r} \exp\left(\frac{a}{r}\right) & \text{si } a \leq 0 \\ \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right) & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

2) On pose  $L_2 = C_2 - r\Delta_2$  et on considère la fonction  $g$  associant à tout réel  $x$  le réel

$$g(x) = \mathbf{P}(\{L_1 \leq x\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\})$$

a) Pour tout réel  $h$  strictement positif, justifier les inégalités :

$$g(x+h) - g(x) \geq \mathbf{P}(\{x < L_1 \leq x+h\})\mathbf{P}(\{L_2 \leq a-x-h\})$$

et

$$g(x+h) - g(x) \leq \mathbf{P}(\{x < L_1 \leq x+h\})\mathbf{P}(\{L_2 < a-x\})$$

b) En déduire que la fonction  $g$  est dérivable à droite sur  $\mathbb{R}$  avec, pour tout réel  $x$ ,  $g'_d(x) = f(x)F(a-x)$ .

On admet que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec, pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = f(x)F(a-x)$ .

3) a) Prouver l'égalité

$$\mathbf{P}(\{L_1 \leq a\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\{-n < L_1 \leq a\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\mathbf{P}(\{L_1 \leq a\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\}) = \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx$$

c) Établir les égalités :

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx$$

et

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \mathbf{P}([L_2 > a-x]) dx$$

4) En déduire, dans le cas où  $a$  est un réel positif ou nul, l'égalité :

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \frac{c}{c+r} \left( 1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right) \exp\left(\frac{-a}{c}\right)$$

### Partie III Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas

Dans cette partie, le réel  $a$  n'étant plus nécessairement fixé, on utilisera la notation  $K_a(t)$ .

Pour tout réel  $a$ , on note  $\Pi(a)$  la probabilité suivante :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n) < 0]\right)$$

Dans le contexte décrit plus haut,  $\Pi(a)$  représenterait la probabilité que la compagnie d'assurance (disposant d'un capital initial de montant  $a$ ) soit en déficit après un sinistre. En particulier  $\Pi(a) = 1$  si  $a < 0$ .

- 1) Montrer que la fonction  $\Pi$  est décroissante.
- 2) Pour tout réel  $a$ , quelles minoration de  $\Pi(a)$  peut-on déduire de la partie II ?
- 3) On admet que la fonction  $\Pi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et vérifie, pour tout réel  $a$  positif ou nul l'égalité :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi(a-x) dx$$

Pourquoi, intuitivement, peut-on conjecturer cette égalité ?

- 4) Soit  $a$  un réel et  $n$  un entier naturel.
  - a) Calculer l'espérance de  $K_a(T_n)$  en fonction de  $n$ ,  $a$ ,  $c$  et  $r$ . Trouver sa limite quand  $n$  tend vers l'infini, selon les valeurs comparées de  $c$  et  $r$ .
  - b) Calculer la variance de  $K_a(T_n)$  en fonction de  $n$ ,  $r$  et  $c$ .
- 5) Dans cette question, on suppose que  $c$  est strictement plus grand que  $r$  et on considère un réel  $a$  positif ou nul.
  - a) Pour tout entier  $n$  strictement supérieur à  $\frac{a}{c-r}$ , établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}([K_a(T_n) < 0]) \geq 1 - \frac{n(c^2 + r^2)}{(a + nr - nc)^2}$$

- b) En déduire l'égalité :  $\Pi(a) = 1$ .
- 6) Dans cette question, on suppose que  $c$  est égal à  $r$  et on considère un réel  $a$  positif ou nul.
  - a) Soit  $y$  un nombre réel. En remarquant que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a l'égalité

$$K_a(T_n) = a - \sum_{i=1}^n (C_i - r\Delta_i)$$

et, à l'aide du théorème de la limite centrée, exprimer le réel  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$ , en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

- b) Pour tout nombre réel  $y$  strictement positif fixé, établir, pour tout entier naturel  $n$  assez grand, la double inégalité :

$$\mathbf{P}([K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}]) \leq \mathbf{P}([K_a(T_n) < 0]) \leq \mathbf{P}([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$$

- c) En déduire la limite de la probabilité  $\mathbf{P}([K_a(T_n) < 0])$  quand  $n$  tend l'infini puis l'inégalité :  $\Pi(a) \geq \frac{1}{2}$ .

**Partie IV Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas**

Dans cette partie, on suppose que  $c$  est strictement plus petit que  $r$ .

1) a) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $a$  positif ou nul, l'inégalité :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right) \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!(c+r)^k}$$

b) En déduire, pour tout réel  $a$  positif ou nul, la minoration :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-ar}{c(c+r)}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout réel positif  $\lambda$  vérifiant  $\lambda < \frac{1}{c}$ , la variable  $\exp(\lambda L_1)$  possède une espérance qu'on calculera.

b) Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n (C_k - r\Delta_k)$ . Pour tout réel positif  $\lambda$  vérifiant  $\lambda < \frac{1}{c}$ , justifier l'égalité :

$$\mathbf{E}(\exp(\lambda S_n)) = \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

3) a) Pour tout réel positif  $\lambda$  vérifiant  $\lambda < \frac{1}{c}$ , tout réel  $a$  positif ou nul et tout entier naturel  $n$  non nul, établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}([S_n > a]) \leq e^{-\lambda a} \mathbf{E}(\exp(\lambda S_n))$$

b) En déduire que tout réel  $\lambda$  élément de  $]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}[$ , la série de terme général  $\frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$  converge et qu'on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

4) En remarquant que, pour tout réel  $a$  positif ou nul,  $\Pi(a) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right)$ , établir les résultats suivants :

i)  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Pi(a) = 0$ ,

ii) Pour tout réel  $\lambda$  vérifiant  $0 < \lambda < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$ , et tout réel  $a$  assez grand, on a l'inégalité :  $\Pi(a) \leq e^{-\lambda a}$   
(on introduira un réel  $\mu$  vérifiant  $\lambda < \mu < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$ ).

5) a) Montrer que si une fonction  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et de limite nulle en  $+\infty$ , alors la fonction  $|\psi|$  a un maximum sur  $\mathbb{R}_+$ .

b) Soit  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$ , toutes deux de limite nulle en  $+\infty$ , vérifiant pour tout réel  $a$  positif ou nul, les égalités :

$$\Pi_1(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_1(a-x) dx \quad \text{et} \quad \Pi_2(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_2(a-x) dx$$

Montrer que les fonctions  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  coïncident sur  $\mathbb{R}_+$ .

c) Établir, pour tout réel  $a$  positif ou nul, l'égalité suivante :

$$\Pi(a) = \frac{c}{r} \exp\left(-a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right)\right)$$