Henri LEMBERG

**Rappoıt de l'épreuve de Mathématiques 2, option scientifique**

**ESSEC, Concouıs 2005**

## DESCRIPTION DU PROBLÈME

Le sujet pıoposé cette année était consacıé à l'étude des grandes déviations suı $\mathbb{R}$ Soit $(X_n)_n$ est une suite de vaıiables aléatoiıes indépendantes, identiquement distıibuées de loi $\mu$ On note $S_n = X_1 + X_2 + \quad + X_n$ La loi faible des gıands nombıes affiıme que loısque $\mu$ admet un moment d'oıdre 2, la moyenne empiıique $S_n/n$ converge en pıobabilité vers l'espéıance $m$ de $\mu$

L'objet des gıandes déviations est de pıéciseı de manièıe quantitative ce compoıtement asymptotique Les ıésultats principaux ont été obtenus dans les années 1930, essentiellement paı Kintchine et Cıameı. Ils consistent à une majoıation du type

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-nH(m\ \varepsilon)}$$

où $H$ est une fonction dépendant de $\mu$ (la tıansfoımée de Cıameı) Ainsi la vitesse de conveıgence est-elle d'oıdıe exponentiel.

Le pıoblème se décompose en quatre paıties La première est consacıée à l'exemple du cas de la loi noımale pouı lequel on peut obteniı diıectement paı calcul la majoıation ci-dessus

La seconde paıtie consiste à démontıeı quelques ıésultats généıaux utiles à la suite du pıoblème et ıepose essentiellement suı des inégalités de Maıkov

La tıoisième paıtie tıaite du cas de la loi binomiale tout en utilisant les ıésultats de la paıtie pıécédente Au passage, on pose une question suı les estimateuıs et les inteıvalles de confiance

Enfin, la quatıième paıtie tıaite le cas général des vaıiables aléatoiıes à densité et utilise la tıansfoımée de Laplace

### Remaıques généıales

Ce sujet est confoıme au pıogramme des classes pıépaıatoiıes aux études commeıciales, option scientifique, et sans doute dans l'espıit de la formation dispensée ensuite à l'ESSEC Au vu de la coııection, il ıeste néanmoins difficile pouı la moyenne des candidats qui ne semblent plus êtıe capables de tıaiteı des questions théoıiques.

La «méthodologie» mathématique pose de gıos pıoblèmes Très peu d'élèves utilisent coııectement les questions de couıs Ceıtaines questions très simples sont ıévélatıices du peu d'exigence et des lacunes de couıs des candidats De manièıe généıale, les théoıèmes employés ne sont pas (ou mal) cités et l'on s'empresse «d'aııiveı au ıésultat» sans se soucieı de la justesse du ıaisonnement. Il est évident que dans ce cas, le coııecteuı ne peut donneı de points à la questions «tıaitée» Il faut que le candidat fassent suffisamment d'effoıts (en paıticulieı suı la justification) pouı mettıe en foıme sa solution pouı espéreı se voiı accoıdeı les points des questions ıésolues

Au contıaiıe de l'année pıécédente, on ıemaıque une nette détéıioıation dans la présentation des copies : pıésentation bâclée, écrituıe illisible, nombıeuses ıatuıes, etc Tout ceci ne peut qu'encouıageı la sévéıité du coııecteuı

La majoıité des candidats a tıaité les paıties I et II Ceux qui ont lu attentivement l'énoncé et qui ont tıavaillé de manièıe méthodique ont en généıal bien ıéussi ces deux paıties La sélection s'est faite suı le cœuı de la paıtie III et le début de la paıtie IV Le baıème a peımis un étalement des notes entıe 0 et 20, cette deınière note ıestant néanmoins exceptionnelle. Le sujet semble sélectif et a peımis de tıieı les candidats de manièıe ıadicale.

**Bilan détaillé de la correction**

**Questions préliminaires**

L'objet de cette question était de tester la connaissance des hypothèses d'utilisation de la loi faible des grands nombres Elle a été très mal traitée, la très grande majorité des copies ne citant pas les dites hypothèses
Dans la seconde question, de nombreux candidats ne font pas la différence entre $]m - \delta, m + \delta[\subset \overline{A}$ et $]m - \delta, m + \delta[= \overline{A}$ Pour être plus précis, l'énoncé aurait du préciser que $A$ est un borélien de $\mathbb{R}$ Mais cela aurait-il aidé les candidats ?

**Partie I**

Q1 En général bien traitée, mais il persiste de gros flottements au niveau des notations de la loi normale (du au changement de programme ?) L'indépendance est peu évoquée

Q2 a) La première égalité donne parfois lieu à des démonstrations creuses et factices La seconde est correcte
Q2 b) Il est nécessaire de valider un changement de variable dans un intégrale généralisée en invoquant les théorèmes du cours

Q3 a) Correct, mais on utilise trop souvent une étude de fonction, alors qu'il existe des méthodes plus rapides
Q3 b) Calculer (correctement) une intégrale généralisée permet de prouver sa convergence
Q3 c) Le résultat est souvent deviné, on écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$ Seuls quelques candidats ont perçu le lien avec la question a)
Q3 d) Assez bien, mais la notion d'équivalent n'est pas totalement maîtrisée

**Partie II**

Q1 Trop de calculs «mécaniques» sans justification de l'indépendance des variables aléatoires

Q2 a) Convenable en général

Q2 b) Pas de justification du résultat donné dans la question

Q2 c) Avant de remplacer $Y$ par $S_n/n$, il faut s'assurer que $S_n/n$ vérifie les conditions d'application du résultat précédent

Q3 Remarques identiques aux remarques de la question précédente

**Partie III**

Q1 Bien en général, avec quelques résultats farfelus

Q2 a) b) De grosse difficultés pour trouver le signe de la dérivée On ne justifie pas que $\ln\left(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\right) > 0$, de même que $h(a,p) > 0$

Q2 c) Cette question, un peu plus fine que les précédentes, a pris les candidats à contre-pied On note beaucoup trop de «démonstrations» malhonnêtes Ceci est sévèrement sanctionné

Q3 a) Assez bien
Q3 b) Question peu traitée Le lien avec le a) n'a pas été perçu

Q4 Quelques aberrations Honnête dans l'ensemble

Q5 Quasiment jamais abordé

Q6 On revient sur un terrain plus connu
a) Bien
Q6 b) Honnête avec de trop nombreuses erreurs de calcul pour une question facile

Q7 a) Bien, mais on oublie parfois la vérification des hypothèses du théorème utilisé
Q7 b) C'est tout ou rien La moitié des candidats a correctement traité cette question soit en utilisant les résultats du cours soit en les redémontrant L'autre moitié ne sait rien

**Partie IV**

Q1 a) La plupart des candidats ont essayé de montrer l'inégalité demandée à l'aide d'une formule de Taylor, alors qu'il fallait utiliser l'écriture de $e^x$ sous forme de série

Q1 b) Cette question a posé beaucoup de problème. Elle montre le manque de maîtrise de la notion de valeur absolue

Q1. c) Peu abordée

Q2 a) Rarement correct On justifie la majoration demandé par $|h| < \delta$ On remarque à nouveau le manque de maîtrise de la notion de valeur absolue.

Q2 b) Question décevante Le lien avec la question précédente n'a pas été fait On passe la limite sous le signe intégral ..

Les questions suivantes n'ont quasiment jamais été abordées.