

CONCOURS D'ADMISSION DE 1999

Option scientifique

Mathématiques I

Vendredi 21 Mai 1999 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout ce problème, on désigne par :

- $E$  un espace euclidien de dimension  $p \geq 1$  dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  est noté  $\langle x, y \rangle$ .
- $S(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de  $E$ .  
On rappelle qu'un endomorphisme  $u$  est dit symétrique s'il vérifie  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$  pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs appartenant à  $E$ .
- $T(E)$  le sous-ensemble de  $S(E)$  constitué des endomorphismes symétriques  $u$  dont le rang est inférieur ou égal à 1 et qui vérifient  $\langle u(x), x \rangle \geq 0$  pour tout vecteur  $x$  appartenant à  $E$ .

Dans la partie I, on décrit les endomorphismes appartenant à  $T(E)$  puis, dans la partie II, on munit l'espace vectoriel  $S(E)$  d'un produit scalaire et on étudie au sens de la norme associée les meilleures approximations des éléments de  $S(E)$  par des éléments de  $T(E)$ .

### Préliminaire: Trace d'une matrice et d'un endomorphisme.

On désigne par  $M_p(\mathbf{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $p \geq 1$ . On associe à toute matrice  $A = (a_{ij})$  appartenant à  $M_p(\mathbf{R})$  sa trace notée  $Tr(A)$  et définie par :

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^p a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{pp}.$$

- Si  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  désignent deux matrices appartenant à  $M_p(\mathbf{R})$ , expliciter  $Tr(AB)$  et montrer que  $Tr(AB) = Tr(BA)$ .
- Si  $M'$  et  $M$  désignent deux matrices semblables appartenant à  $M_p(\mathbf{R})$ , en déduire que les traces de  $M'$  et  $M$  sont égales.

Dans la suite, on appelle *trace d'un endomorphisme de  $E$*  la valeur commune de la trace de ses matrices  $M$  relativement aux différentes bases de  $E$ .

## Partie I : Etude des éléments de l'ensemble T(E).

### 1°) Sous-espace orthogonal à un vecteur non nul $x$ de E.

On considère dans cette question un vecteur non nul  $x$  appartenant à E.

- a) Pour tout vecteur  $v$  appartenant à E, exprimer en fonction de  $x$  et  $v$  l'unique nombre réel  $\lambda(v)$  tel que le vecteur  $v - \lambda(v)x$  soit orthogonal à  $x$ .
- b) En remarquant que tout vecteur  $v$  appartenant à E peut s'écrire sous la forme:

$$(1) \quad v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$$

établir que la droite dirigée par le vecteur  $x$  et le sous-espace X constitué des vecteurs de E orthogonaux au vecteur  $x$  sont supplémentaires dans E.

### 2°) Elément de T(E) associé à un vecteur de E.

A tout vecteur non nul  $x$  de E, on associe l'application  $u_x$  de E dans E définie par:

$$u_x(v) = \langle x, v \rangle x.$$

- a) Montrer que  $u_x$  appartient à T(E), puis écrire la matrice de  $u_x$  dans une base de E constituée du vecteur  $x$  et d'une base du sous-espace X orthogonal à  $x$ .

En déduire la trace de  $u_x$  et la trace de  $u_x \circ u_x$  en fonction de  $x$ .

- b) Déterminer en fonction de  $x$  les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $u_x$ .

- c) On désigne par  $f$  un endomorphisme de E.

A l'aide de la formule (1), expliciter les éléments diagonaux de la matrice de  $f \circ u_x$  dans une base de E constituée du vecteur  $x$  et d'une base du sous-espace X orthogonal à  $x$ , puis en déduire la trace de  $f \circ u_x$  en fonction de  $x$ .

### 3°) Vecteurs de E associés à un élément de T(E).

A tout élément non nul  $u$  de T(E), on associe un vecteur non nul  $x$  de la droite  $\text{Im } u$ .

- a) Montrer que  $x$  est vecteur propre de  $u$  et que la valeur propre associée  $\mu$  est positive.

- b) A l'aide de la formule (1), montrer que l'on a pour tout vecteur  $v$  appartenant à E :

$$u(v) = \frac{\mu}{\|x\|^2} \langle x, v \rangle x.$$

- c) En déduire que la valeur propre  $\mu$  est strictement positive et qu'il existe un vecteur  $y$  de E au moins tel que  $u = u_y$ , c'est à dire tel que l'on ait pour tout vecteur  $v$  appartenant à E:

$$u(v) = \langle y, v \rangle y.$$

- d) L'application de E dans T(E) associant à tout vecteur  $x$  appartenant à E l'endomorphisme  $u_x$  de T(E) défini par  $u_x(v) = \langle x, v \rangle x$  est-elle injective ? surjective ?

## Partie II : Approximation des éléments de S(E) par des éléments de T(E).

On associe à tout couple  $(f, g)$  d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel:

$$[f, g] = \text{Tr}(f \circ g)$$

valeur commune de la trace des matrices de  $f \circ g$  relativement aux différentes bases de E. Ainsi, lorsque l'espace euclidien E est rapporté à une base orthonormale dans laquelle on désigne par  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  les matrices (alors symétriques) de  $f$  et  $g$ , on a:

$$[f, g] = \text{Tr}(AB).$$

### 1°) Un produit scalaire sur S(E).

- a) Montrer que l'application associant à tout couple  $(f, g)$  d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel  $[f, g] = \text{Tr}(f \circ g)$  est un produit scalaire sur S(E).

On notera  $N$  la norme associée à ce produit scalaire, définie par  $N(f) = \sqrt{[f, f]}$ .

- b) On désigne par  $f$  un élément de  $S(E)$  et par  $u_x$  un élément de  $T(E)$ . Déduire des résultats obtenus dans la partie I que:

$$N^2(f - u_x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

Dans la suite, on suppose que l'endomorphisme symétrique  $f$  est *donné* dans  $S(E)$  et l'on pose pour tout vecteur  $x$  appartenant à  $E$ :

$$F(x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

L'objectif est de déterminer les vecteurs  $x$  de  $E$ , c'est à dire les endomorphismes  $u_x$  de  $T(E)$ , qui réalisent le minimum  $m(f) = \inf\{ F(x) / x \in E \}$  dans la mesure où celui-ci existe.

2°) Condition nécessaire de minimum pour  $F$ .

Pour tout vecteur  $x$  et pour tout vecteur unitaire  $y$  (vérifiant donc  $\|y\| = 1$ ) appartenant à  $E$ , on considère la fonction  $h$  définie de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  par:

$$h(t) = F(x + ty).$$

- Montrer que  $h$  est une fonction polynôme de degré 4 dont on précisera les coefficients.
- Prouver, si  $F$  présente un minimum en  $x$  pour tout vecteur unitaire  $y$ , que  $h'(0) = 0$ .
- En déduire que  $f(x) = \|x\|^2 x$ .
- Prouver, si  $F$  présente un minimum en  $x$ , que:

$$F(x + ty) - F(x) = t^2[(t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)].$$

3°) Condition nécessaire et suffisante de minimum pour  $F$ .

Prouver que  $F(x) = m(f)$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

$$(i) f(x) = \|x\|^2 x \quad ; \quad (ii) \text{ pour tout vecteur unitaire } y: \langle y, f(y) \rangle \leq \|x\|^2.$$

4°) Etude du maximum de  $\langle y, f(y) \rangle$  pour  $\|y\| = 1$ .

- Justifier, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, l'existence d'une base orthonormale  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  formée de vecteurs propres pour  $f$ . On notera  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $f$  associées à ces vecteurs propres  $e_1, e_2, \dots, e_p$  en supposant celles-ci classées dans l'ordre croissant.
- Exprimer  $N(f)$  en fonction des valeurs propres de  $f$ .
- En décomposant un vecteur unitaire  $y$  dans la base précédente, montrer que:

$$\text{Sup}\{ \langle y, f(y) \rangle / \|y\| = 1 \} = \lambda_p.$$

On précisera de plus quels sont les vecteurs unitaires  $y$  tels que  $\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p$ .

5°) Conclusion et valeur de  $m(f)$ .

- Montrer que si  $\lambda_p \leq 0$ , alors  $F(x) = m(f)$  si et seulement si  $x$  est nul.
- Déterminer si  $\lambda_p > 0$  la valeur de  $m(f)$  et l'ensemble des vecteurs  $x$  tels que  $F(x) = m(f)$ .

6°) Application à l'étude d'un exemple.

Dans cette question, l'espace euclidien  $E = \mathbf{R}^p$  est rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique. On suppose que, dans cette base canonique, la matrice symétrique  $M = (m_{ij})$  de  $f$  vérifie les deux propriétés suivantes:

- $m_{ij} > 0$  pour tout couple  $(i, j)$  de nombres entiers compris entre 1 et  $p$ .
- $\sum_{j=1}^p m_{ij} = 1$  pour tout nombre entier  $i$  compris entre 1 et  $p$ .

- a) Montrer que 1 est valeur propre de  $M$  et donner un vecteur propre associé.
- b) On désigne par  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ , par  $X$  un vecteur associé de composantes  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , et par  $i$  un nombre entier tel que  $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$ .  
En considérant la  $i^{\text{ème}}$  ligne du système  $MX = \lambda X$ , montrer que  $|\lambda| \leq 1$ , puis que l'égalité  $|\lambda| = 1$  implique  $\lambda = 1$  et  $x_1 = x_2 = \dots = x_p$ .  
*(On rappelle à cet effet que dans l'inégalité triangulaire de  $\mathbf{R}$ , il y a égalité si et seulement si tous les nombres réels qui interviennent sont de même signe).*  
Préciser la dimension du sous-espace propre associé à 1.
- c) Déterminer enfin les vecteurs  $x$  appartenant à  $\mathbf{R}^p$  tels que  $F(x) = m(f)$ , puis démontrer alors qu'il existe un unique endomorphisme  $u$  appartenant à  $T(E)$ , dont on donnera la matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^p$ , tel que  $m(f) = N^2(f - u)$ .  
Que représente cette dernière matrice ?

\*\*\*