LES LIVRETS

DE PRAGMATHIQUES PRÉPA

Concours 2018

contact@pragmathiquesprepa.fr

Espaces vectoriels ECS1

DES FICHES DE COURS

Opérations sur les événements

Les opérations avec ∩ et ∪ sont les mêmes que celles dans le chapitre des ensembles.

Événements incompatibles

> Deux **événements** sont **incompatibles** quand leur intersection est disjointe.
>
> $A \cap B = \emptyset$ ssi A et B sont incompatibles

On fera le lien entre connecteurs logiques et opérations sur les événements.

2) Coefficients binomiaux

Dénombrements

On tire p boules parmi n avec $p \leq n$

Avec ordre

Sans ordre

Avec remise

Sans remise

Sans remise

Nombre d'**applications** d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

$\boldsymbol{n^p}$ **possibilités**

Nombre d'**applications injectives** d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

$n(n-1)\dots(n-p+1)$

$= \dfrac{\boldsymbol{n\,!}}{\boldsymbol{(n-p)\,!}}$ **possibilités**

Cas où $p = n$

Tirage sans remise de n boules parmi n.

Nombre d'**applications bijectives** d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments.

Nombre de **permutations** d'un ensemble à n éléments

$\boldsymbol{n}$**! possibilités**.

$\boldsymbol{\binom{n}{p}}$ **possibilités** avec :

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)!}$$

Factorielle, notation $n!$

Interprétation de $n!$ en tant que nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. ▻

Une **permutation** d'un ensemble E est une bijection de E dans E.

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$

Le nombre de **parties à p éléments d'un ensemble à n éléments** est égal à $\binom{n}{p}$.

$\binom{n}{p}$ est le nombre de **combinaisons** de p éléments choisis parmi n. C'est le nombre de façons de choisir p objects distincts parmi n objets donnés.

$\forall\, p \in \mathbb{N}, p > n, \quad \binom{n}{p} = 0$

$\boldsymbol{\binom{n}{0} = 1}$ car il n'y a qu'une façon de choisir 0 élément parmi n.

$\boldsymbol{\binom{n}{1} = n}$ car il y a n façons de choisir un élément parmi n (chacun des éléments choisis).

On fera le lien entre les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.

Formule du triangle de Pascal

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, p \in [\![1,n]\!], \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Autre formulation : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, p \in [\![0,n]\!], \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux. ▻

Triangle de Pascal

$\boldsymbol{n=0}$	1					
$\boldsymbol{n=1}$	1	1				
$\boldsymbol{n=2}$	1	2	1			
$\boldsymbol{n=3}$	1	3	3	1		
$\boldsymbol{n=4}$	1	4	6	4	1	
$\boldsymbol{n=5}$	1	5	10	10	5	1
	$\boldsymbol{p=0}$	$\boldsymbol{p=1}$	$\boldsymbol{p=2}$	$\boldsymbol{p=3}$	$\boldsymbol{p=4}$	$\boldsymbol{p=5}$

Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

Relation de symétrie

$$\forall\, (p,n) \in \mathbb{N}^2, \qquad p \leq n, \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Remarque

On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Nombre de combinaisons

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n\,!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

Formule « sans-nom »

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

Nombre de parties

Pour tout entier n, le **nombre de parties d'un ensemble à n éléments** est égal à $\mathbf{2^n}$

3) Probabilité

a) Notion de tribu

Tribu ou σ-algèbre d'événements.

Une **tribu ou (σ-algèbre)** notée $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(2) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$ (donc $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$)

(3) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_k)_{k\in I}$ est une suite d'événements (c'est-à-dire $A_k \in \mathcal{A}$), alors l'union des A_k $(k \in I)$ appartient à $\mathcal{A}$:

$$(\forall\, k \in I,\ A_k \in \mathcal{A}) \implies \bigcup_{k\in I} A_k \in \mathcal{A}$$

Les éléments de la tribu sont des **événements**.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**

On donnera quelques exemples significatifs d'événements de la forme :

$$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \quad et \quad A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$

Aucun raisonnement théorique autour de la notion de tribu n'est exigible des étudiants.

Remarque

Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors, d'après les lois de Morgan :

$\overline{\bigcap_{k\in I} A_k} = \bigcup_{k\in I} \overline{A_k}$. Or, $\forall\, k \in I,\ A_k \in \mathcal{A}$, donc d'après (2), $\overline{A_k} \in \mathcal{A}$, et d'après (3) :

$$\bigcup_{k\in I} \overline{A_k} \in \mathcal{A}\ .\ \text{Donc :}\ \overline{\bigcap_{k\in I} A_k} \in \mathcal{A} \text{ et d'après (2) :} \bigcap_{k\in I} A_k \in \mathcal{A}$$

On a donc : $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable

On pourra introduire différentes tribus sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ et montrer que le chois de la tribu dépend de l'expérience que l'on cherche à modéliser.

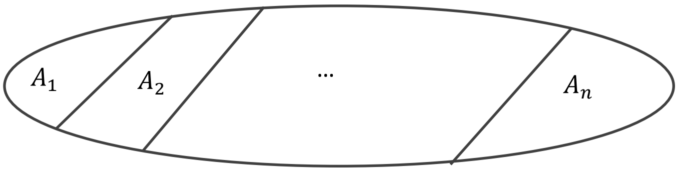
b) Système complet d'événements

Système complet d'événements fini

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\{A_k,\ k \in [\![1,n]\!]\}$ est un **système complet d'événements finis** ssi

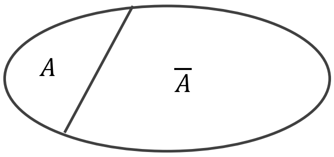
$$\begin{cases} \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ A_i \neq \emptyset \\ \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \\ \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \end{cases}$$

On se limitera aux systèmes complets d'événements de type $A_1, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), où les A_i sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à Ω.



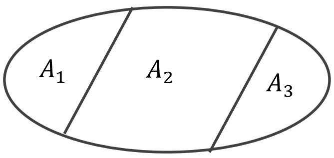
Cas particulier $n = 2$

$\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements car : $\begin{cases} A \neq \emptyset, \ \overline{A} \neq \emptyset \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \\ A \cup \overline{A} = \Omega \end{cases}$



Cas particulier $n = 3$

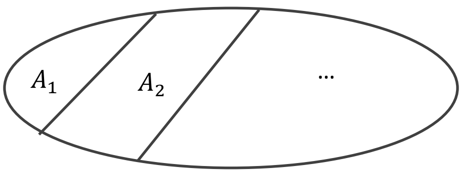
$\{A_1, A_2, A_3\}$ est un système complet d'événements ssi $\begin{cases} A_1 \neq \emptyset, \ A_2 \neq \emptyset, \ A_3 \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega \end{cases}$



Système complet d'événements infini

Soit $I \subset \mathbb{N}^*$. $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** ssi :

$$\begin{cases} \forall \, i \in I, \ \ A_i \neq \emptyset \\ \forall \, (i, j) \in I^2 \text{ avec } i \neq j, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \\ \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \end{cases}$$



Tribu engendrée par un système complet d'événements

Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements.

La plus petite tribu contenant $(A_i)_{i \in I}$ est appelée la tribu engendrée par $(A_i)_{i \in I}$.

LE COURS AVEC LES DÉMONSTRATIONS

Familles Génératrices

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

Définition

Soit $\mathcal{G} = (e_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de vecteurs de E. $\mathcal{G}$ est une **famille génératrice** si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$

Sous-espace engendré par $\mathcal{G}$

Soit $\mathcal{G} = (e_i)_{1 \le i \le p}$ est une famille de vecteurs de E.

$Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big)$ est l'**ensemble des combinaisons linéaires de $(e_i)_{1 \le i \le p}$**.

C'est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{G}$**.

Démonstration

(i)

E est un espace vectoriel donc stable par combinaisons linéaires. Donc $\forall\, x \in Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big),\ x \in E$.

Donc $Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big) \subset E$

(ii)

$$0_E = \sum_{i=1}^{p} 0_{\mathbb{K}}\, e_i$$

Donc $0_E \in Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big)$ donc $Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big) \neq \emptyset$

(iii)

Soient $(x, y) \in \Big(Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big)\Big)^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$

$x \in Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big)$, donc $\exists\ (\alpha_i)_{1 \le i \le p} \in \mathbb{K}^p$ tel que : $x = \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \cdots + \alpha_p\, e_p$

$y \in Vect\big((e_i)_{1 \le i \le p}\big)$, donc $\exists\ (\beta_i)_{1 \le i \le p} \in \mathbb{K}^p$ tel que : $y = \beta_1\, e_1 + \beta_2\, e_2 + \cdots + \beta_p\, e_p$

On a donc :

$$\begin{aligned}\lambda\, x + y &= \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i\, e_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda\, \alpha_i\, e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i\, e_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\lambda\, \alpha_i + \beta_i)\ e_i\end{aligned}$$

Donc $\lambda\, x + y \in Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big)$

Donc $Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big)$ est stable par combinaison linéaire.

(iv)

D'après (i), (ii) et (iii),

$$Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big) \text{ est un sous-espace propre de } E.$$

Propriétés

Soit $(e_i)_{1\le i\le p}$ est une famille de vecteurs de E

Si e_{p+1} est un vecteur de E qui est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_p$, alors : $Vect\big((e_i)_{1\le i\le p+1}\big) = Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big)$

En particulier $Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}, 0_E\big) = Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big)$

Si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{K}^*$, alors : $Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big) = Vect\big(\alpha_1\, e_1,\ \alpha_2\, e_2, \dots, \alpha_p\, e_p\big)$

Démonstration

Pour montrer une égalité entre deux ensembles A et B (ici $A = Vect\big((e_i)_{1\le i\le p+1}\big)$ et $B = Vect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big)$) on peut :

- *Procéder par double inclusion : $A \subset B$ et $B \subset A$*
- *Procéder par équivalence : $x \in A \Leftrightarrow x \in B$*

Dans la mesure du possible on choisit la seconde méthode. C'est ce que l'on fait ici.

Soit $(e_i)_{1\le i\le p}$ est une famille de vecteurs de E et soit e_{p+1} un vecteur de E qui est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_p$.

$$\exists\, (\lambda_i)_{1\le i\le p} \in \mathbb{K}^p, \qquad e_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i \qquad (\#_1)$$

$$x \in Vect\big((e_i)_{1\le i\le p+1}\big) \Leftrightarrow \exists\, (\alpha_i)_{1\le i\le p+1} \in \mathbb{K}^{p+1}, \qquad x = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i\, e_i$$

$$\Leftrightarrow \exists\, (\alpha_i)_{1\le i\le p+1} \in \mathbb{K}^{p+1}, \qquad x = \alpha_{p+1}\, e_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, e_i$$

Et d'après $(\#_1)$:

$$\Leftrightarrow \exists\, (\alpha_i)_{1\le i\le p+1} \in \mathbb{K}^{p+1}, \qquad x = \alpha_{p+1} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, e_i$$

$$x \in Vect\big((e_i)_{1\leq i\leq p+1}\big) \Leftrightarrow \exists\ (\alpha_i)_{1\leq i\leq p+1} \in \mathbb{K}^{p+1}, \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \big(\alpha_{p+1}\,\lambda_i + \alpha_i\big)\, e_i$$

$$\Leftrightarrow\ x \in Vect\big((e_i)_{1\leq i\leq p}\big)$$

Donc :

Si e_{p+1} est un vecteur de E qui est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_p$, alors :

$$Vect\big((e_i)_{1\leq i\leq p+1}\big) = Vect\big((e_i)_{1\leq i\leq p}\big)$$

Démonstration

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille de vecteurs de E.

$$x \in Vect\big((e_i)_{1\leq i\leq p}\big) \Leftrightarrow \exists\ (\beta_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{K}^{p}, \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i\, e_i$$

Et comme $\forall\ i \in\ [\![1,p]\!],\ \alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$:

$$\Leftrightarrow \exists\ (\beta_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{K}^{p}, \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \times \frac{\alpha_i}{\alpha_i}\ e_i$$

$$\Leftrightarrow \exists\ (\beta_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{K}^{p}, \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \cdot (\alpha_i\, e_i)$$

Et en posant pour tout $i \in [\![1,p]\!],\ \gamma_i = \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$:

$$\Leftrightarrow \exists\ (\gamma_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{K}^{p}, \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i\ \cdot (\alpha_i\, e_i)$$

$$\Leftrightarrow\ x \in Vect\big((\alpha_i\, e_i)_{1\leq i\leq p}\big)$$

Donc :

Si pour tout $i \in\ [\![1,p]\!],\ \alpha_i \in \mathbb{K}^*,$ alors : $Vect\big((e_i)_{1\leq i\leq p}\big) = Vect\big(\alpha_1\, e_1,\ \alpha_2\, e_2, \dots, \alpha_p\, e_p\big)$

Bases

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une famille de n vecteurs de E.

$\mathcal{B}$ est une **base de $\boldsymbol{E}$** si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Propriété

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une famille de n vecteurs de E.

$\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_i)_{1 \le i \le n}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall\, x \in E, \qquad \exists!\, (x_i) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$

Les $(x_i)_{1 \le i \le n}$ sont les **coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la base $\boldsymbol{E}$**.

<u>Démonstration</u>

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une famille de n vecteurs de E.

(i)

Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Ici nous démontrons l'existence d'un unique n-uplet. Pour cela nous démontrons d'abord son existence, puis nous montrons son unicité. Cette dernière se démontre par l'absurde. Nous supposons qu'il en existe une deuxième et nous aboutissons à une contradiction (souvent qu'il s'agit du même n-uplet).

$\mathcal{B}$ est base donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

$$\exists\, (x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \quad (\#_1)$$

Supposons qu'il existe un deuxième n-uplet qui vérifie ces conditions :

$$\exists\, (\beta_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, e_i \quad (\#_2)$$

On a donc en soustrayant $(\#_1)$ et $(\#_2)$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, e_i = x - x$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \beta_i)\, e_i = 0_E$$

Or, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille libre. Donc :

$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i - \beta_i = 0_{\mathbb{K}}$

$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i = \beta_i$

Il y a contradiction. Donc le n-uplet $(x_i)_{1 \le i \le n}$ est unique :

Donc :

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \Longrightarrow \quad \forall\, x \in E, \exists!\, (x_i) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \; x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$

(ii)

Supposons que tout vecteur de E s'écrive de façon unique comme combinaison linéaire de $(e_i)_{1 \le i \le n}$.

On a donc par définition $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille génératrice de E.

Soit $(\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0_E$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i = \sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{K}}\, e_i$$

Or, $0_E \in E$ et tout vecteur de E se décompose de façon unique.

Donc par unicité de la décomposition : $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.

Donc $\mathcal{B}$ est libre.

$\mathcal{B}$ est libre et génératrice, donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

Donc :

$$\forall\, x \in E, \exists!\, (x_i) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \; x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \Longrightarrow \mathcal{B} \text{ est une base de } E$$

(iii)

D'après (i) et (ii) on a :

$\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_i)_{1 \le i \le n}$

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients valent 0 sauf le $i^{\text{ème}}$ coefficient qui vaut 1. $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$: c'est **la base canonique de $\mathbb{R}^n$**

Démonstration

(i)

$\forall\ (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n,$

$$\begin{aligned}(x_i)_{1\leq i\leq n} &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, x_n)\\ &= x_1\,(1,0,\dots,0) + x_2\,(0,1,0,\dots,0) + x_n\,(0,\dots,0,1)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\end{aligned}$$

Et comme $\forall\ i \in [\![1,n]\!],\ x_i \in \mathbb{R}$:

$(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$

(ii)

Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \cdots + \lambda_n\, e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$

$(\lambda_1, 0, \dots, 0) + (0, \lambda_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, \lambda_n) = (0,0, \dots 0)$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = (0,0, \dots 0)$

Donc $\forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0_{\mathbb{R}}$

Donc $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

(iii)

D'après (i) et (ii), $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 0 sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
$(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: c'est **la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**

Démonstration

(i)

Soit $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, E_{i,j}$$

Donc $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

(ii)

Soient $\left(\lambda_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathbb{R}^{np}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}\, E_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \qquad \lambda_{i,j} = 0_{\mathbb{R}}$

Donc $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

(iii)

D'après (i) et (ii), $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note e_i le vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $e_i : x \longmapsto x^i$

$(e_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$: c'est **la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.**

On note aussi $(X^i)_{0\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration avec $(X^i)_{0\leq i\leq n}$

(i)

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$\exists\, (a_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad P = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i$

Donc $(X^i)_{0\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$

(ii)

Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, X^i = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$$

DES FICHES MÉTHODES

II] Méthodes qui donnent juste la convergence

6) En prolongeant par continuité

Intégrale impropre d'une fonction prolongeable par continuité

Théorème

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Si f une fonction continue sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

De plus, si $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en b, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

Remarque

Ce théorème ne convient pas quand $b = +\infty$ car une fonction n'est pas prolongeable par continuité en $+\infty$.

Théorème

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Si f une fonction continue sur $]a, b]$ et prolongeable par continuité en a, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

De plus, si $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

Exercice

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^t}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\, ln(t)}{t-1}dt$

1)

$t \longmapsto \frac{1}{t^t}$ est continue sur $]0,1]$

Soit $t > 0$:

$$\frac{1}{t^t} = t^{-t}$$
$$= e^{-tln(t)}$$

D'après les croissances comparées : $-t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

Or, exp est continue en 0, donc par composition :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^t} = e^0 = 1$$

Donc

$t \longmapsto \frac{1}{t^t}$ est prolongeable par continuité en 0.

Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{t^t} \text{ converge}}$$

2)

$t \longmapsto \frac{t\,ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$

D'après les croissances comparées : $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

$$\frac{1}{t-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

Donc par produit :

$$\lim_{t\to 0} \frac{tln(t)}{t-1} = 0$$

$t \longmapsto \frac{t\,ln(t)}{t-1}$ est prolongeable par continuité en 0.

Donc :

$$\forall\, B \in]0,1[\,, \qquad \int_0^B \frac{t\,ln(t)}{t-1}dt \text{ converge}$$

Soit $t > 0$

$\ln(t) = \ln\big(1 + (t-1)\big)$ et $t - 1 \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$ donc :

$\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t - 1$

Donc :

$$\frac{tln(t)}{t-1} \underset{t \to 1}{\sim} \frac{t(t-1)}{t-1}$$

$$\underset{t \to 1}{\sim} t$$

Et donc : $\frac{tln(t)}{t-1} \underset{t \to 1}{\longrightarrow} 1$

$t \longmapsto \frac{t\ ln(t)}{t-1}$ est prolongeable par continuité en 1

Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t\ ln(t)}{t-1} dt \text{ converge}}$$

7) En utilisant les équivalents

Critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.

On suppose qu'au voisinage de b, g est de signe constant. De plus, $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$

Donc : $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Résultats similaires sur $]a, b]$

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$.

On suppose qu'au voisinage de a, g est de signe constant. De plus, $f(t) \underset{t \to a^+}{\sim} g(t)$

Donc : $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exercice

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$

1)

$t \longmapsto \frac{t}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$

Or, $t \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$ donc :

$$\frac{t}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Or, en reconnaissant l'intégrale de Riemann ($\frac{1}{2}$<1) on a : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$ converge

Donc d'après le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives, on a :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt \text{ converge}}$$

2)

$t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$e^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc :

$$\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$$

$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge (Riemann avec $\alpha = 1$)

Donc d'après le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \text{ diverge}}$$

3)

$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$

(i)

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

$\int_{0,5}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$ converge (Riemann $\frac{1}{2} < 1$) donc d'après le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives, on a :

$$\int_{0,5}^1 \frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}}\,dt \text{ converge}$$

(ii)

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge (Riemann $\frac{1}{2} < 1$) donc d'après le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives, on a :

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}} dt \text{ converge}$$

(iii) Donc, d'après (i) et (ii) :

$$\boxed{\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}} dt \ \text{ converge}}$$

DES CORRECTIONS DÉTAILLÉES

Une marge à droite pour noter :

- Ses remarques (à refaire pendant les révisions etc.)
- Les rappels de cours
- Les réponses aux questions posées en classe
- …

Corrigé

(QP)

La série de terme général x_n converge, donc :

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

Et par définition de la limite :

$\exists\, N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall\, n \geq N,\ \ 0 \leq x_n \leq 1,$

Et en multipliant par $x_n \geq 0$:

$\exists\, N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall\, n \geq N,\ \ 0 \leq (x_n)^2 \leq x_n$

Or, la série de terme général x_n converge, donc d'après le critère de comparaisons des séries de terme général positif, la série de terme général x_n^2 converge.

Si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi.

1)

$x \longmapsto -x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, exp est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc par composition : $x \longmapsto e^{-x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Et comme exp est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ch est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en tant que somme et produit par une constante de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\begin{aligned} ch'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow e^x > e^{-x} \end{aligned}$$

or, exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x > -x \\ &\Leftrightarrow 2x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ch(0) &= \frac{e^0 + e^0}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2} > 0$ donc :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}}{2} = 0\end{array}\right\} \text{donc, par somme, } \lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$$

Et :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{2} = +\infty\end{array}\right\} \text{donc, par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_f$ est centré en 0

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2}$$
$$= ch(x)$$

Donc ch est paire. Un seul calcul de limite était nécessaire.

2)

ch est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad ch''(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Donc d'après la formule de Taylor-Young :

$\exists\, \varepsilon$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad ch(x) = ch(0) + x \times ch'(0) + \frac{x^2}{2} \times ch''(0) + x^2 \times \varepsilon(x)$$
$$= 1 + \frac{1-1}{2}\, x + \frac{1+1}{2} \times \frac{x^2}{2} + x^2\, \varepsilon(x)$$

Donc :

Le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0 est :

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\, \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$