ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2004

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mercredi 12 Mai 2004 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans ce problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et on convient d'identifier tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La transposée d'une telle matrice X est la matrice-ligne ${}^tX = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Le produit scalaire canonique d'un vecteur X et d'un vecteur Y de $\mathbf{R}^n$ est alors égal à :

$$< X,Y > = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

La norme euclidienne de X est définie par $\|X\| = \sqrt{< X, X >}$ et on dira qu'une suite de vecteurs (X_p) de $\mathbf{R}^n$ converge vers un vecteur X de $\mathbf{R}^n$ si la suite $\|X_p - X\|$ converge vers 0.

Pour finir, on désigne par :
- I la matrice-identité d'ordre n.
- A une matrice symétrique réelle d'ordre n.

ESSEC MBA
AVENUE BERNARD HIRSCH - BP 105
95021 CERGY-PONTOISE CEDEX FRANCE
TÉL. : 33 (0) 1 34 43 30 00
FAX : 33 (0) 1 34 43 30 01
WEB : WWW.ESSEC.FR

ESSEC
ÉTABLISSEMENT PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
RECONNU PAR L'ÉTAT, MEMBRE DE LA FESIC

PARTIE I : Etude d'une suite de vecteurs

1°) Dans cette question, on note C un vecteur non nul de composantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de $\mathbf{R}^n$.

a) Expliciter le produit matriciel $C\,{}^tC$. La matrice $C\,{}^tC$ est-elle diagonalisable?

b) Exprimer $(C\,{}^tC)^2$ en fonction de $C\,{}^tC$ et de la norme de C.

c) En déduire que toute valeur propre de $C\,{}^tC$ est égale à 0 ou à $\|C\|^2$.

d) Préciser le sous-espace propre associé à 0.

Calculer $C\,{}^tC\,C$ en fonction de C et préciser le sous-espace propre associé à $\|C\|^2$.

e) En déduire la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $C\,{}^tC$.
Montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale lorsque le vecteur C est unitaire.

2°) Dans cette question, on désigne par X et Y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.

a) Établir que ${}^tXY = {}^tYX$, ${}^tXAY = <X, AY> = <AX, Y>$, $({}^tXY)^2 = {}^tX(Y\,{}^tY)X = {}^tY(X\,{}^tX)Y$.

b) Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs $U_1, U_2, \dots, U_n$ de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels existent des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $AU_1 = \lambda_1 U_1, AU_2 = \lambda_2 U_2, \dots, AU_n = \lambda_n U_n$.

c) Exprimer les vecteurs X et AX dans la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ainsi que leurs normes à l'aide des produits scalaires $<U_i, X>$ et $<U_i, AX>$ où $1 \le i \le n$, puis prouver l'égalité suivante :

$$<X, AX> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i <U_i, X>^2 .$$

d) En déduire les égalités matricielles suivantes :

$$I = \sum_{i=1}^{n} U_i\,{}^tU_i \quad ; \quad A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i\,{}^tU_i .$$

Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $U_i\,{}^tU_i$.

e) En déduire les inégalités suivantes :

$$\min_{1\le i\le n}(\lambda_i)\|X\|^2 \le <X, AX> \le \max_{1\le i\le n}(\lambda_i)\|X\|^2$$

f) *Application* : encadrer par deux nombres entiers les valeurs propres de la matrice d'ordre n définie ci-dessous (tous les éléments sont nuls, sauf sur les trois diagonales centrales) :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3°) Dans cette question, on note $\rho(A) = \max_{1\le i\le n}(|\lambda_i|)$.

a) Vérifier que $\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 <U_i, X>^2$.

Prouver que $\|AX\| \le \rho(A)\|X\|$ et exhiber un vecteur réalisant l'égalité.

b) Établir l'équivalence des deux propositions suivantes :

i. Pour tout vecteur X, la suite (A^pX) tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

ii. $\rho(A) < 1$.

PARTIE II : Un problème de minimisation

Dans toute cette partie, $\mathbf{R}_p[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p et α, β sont deux réels vérifiant $0 < \alpha < \beta$.

On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| \,/\, \alpha \le t \le \beta\}$ où Q décrit $\mathbf{R}_p[X]$ et vérifie $Q(0) = 1$.

1°) On considère la suite de fonctions T_p définie par $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, et, si $p \ge 1$, par la relation de récurrence $T_{p+1}(t) = 2t\,T_p(t) - T_{p-1}(t)$.

a) Montrer que T_p est une fonction-polynôme de degré p et préciser le coefficient de t^p.

b) Prouver, pour tout réel θ et tout entier naturel p que $T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta)$.
On rappelle à cet effet la formule de trigonométrie $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

c) En déduire $\sup\{|T_p(t)| \,/ -1 \le t \le 1\}$ et montrer que T_p admet dans $[-1, 1]$ p zéros distincts que l'on précisera.

2°) On désigne par a un réel tel que $|a| > 1$.

On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| \,/ -1 \le t \le 1\}$ où Q décrit $\mathbf{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$.

Pour cela, on désigne par S_p la fonction $\dfrac{T_p}{T_p(a)}$.

a) On considère, s'il en existe, une fonction polynôme P de $\mathbf{R}_p[X]$ telle que $P(a) = 1$ et vérifiant : $\sup\{|P(t)| \,/ -1 \le t \le 1\} < \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

Préciser pour $0 \le j \le p$ le signe de $S_p(\cos(\frac{j\pi}{p})) - P(\cos(\frac{j\pi}{p}))$.

En déduire que $S_p - P$ a au moins $p+1$ racines réelles distinctes, et en tirer une contradiction en examinant le degré de $S_p - P$.

b) En déduire que $\sup\{|Q(t)| \,/ -1 \le t \le 1\}$ où Q décrit $\mathbf{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$ est minimal pour S_p et vaut $\dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

c) Si P est un polynôme satisfaisant à ce problème de minimisation, montrer que $\frac{1}{2}(P + S_p)$ est aussi un polynôme satisfaisant à ce problème, et qu'on a pour $0 \le j \le p$:

$$\frac{1}{2}\left|P(\cos(\frac{j\pi}{p})) + S_p(\cos(\frac{j\pi}{p}))\right| = \frac{1}{|T_p(a)|}.$$

En déduire que $P = S_p$.

3°) Établir que le polynôme suivant est l'unique solution du problème de minimisation posé dans le préambule de cette partie :

$$\frac{T_p(\frac{2t - \alpha - \beta}{\beta - \alpha})}{T_p(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta})}.$$

PARTIE III : Résolution itérative d'un système $AX = B$

On supposera de plus, dans cette partie, que les valeurs propres de A sont strictement positives et on les classe comme suit : $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

On étudie une méthode itérative de résolution du système de Cramer $AX = B$, qu'on définit à partir d'une suite de réels strictement positifs (α_p) et d'un vecteur X_0 de $\mathbf{R}^n$:

$$X_{p+1} = X_p + \alpha_p(B - AX_p).$$

Justifier l'existence et l'unicité de la solution X^* du système.

1°) Dans cette question, on suppose la suite (α_p) constante, égale à $\alpha > 0$.

a) Montrer, pour tout nombre entier naturel p, que $X_p - X^* = (I - \alpha A)^p(X_0 - X^*)$.

b) Préciser les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de la matrice $I - \alpha A$, ainsi que $\rho(I - \alpha A) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|\mu_i|)$.

Tracer la courbe représentative de la fonction définie par $f(\alpha) = \rho(I - \alpha A)$.

c) En déduire que (X_p) converge vers X^* si et seulement si $\alpha < 2/\lambda_n$.

Montrer que la convergence est optimale en un sens que l'on précisera pour $\alpha = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ et montrer qu'alors :

$$\|X_p - X^*\| \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^p \|X_0 - X^*\|.$$

2°) On revient au cas général et on pose pour tout nombre entier naturel $p \geq 1$:

$$P_p(t) = (1 - \alpha_0 t)(1 - \alpha_1 t)\ldots(1 - \alpha_{p-1} t) \quad \text{et} \quad P_p(A) = (I - \alpha_0 A)(I - \alpha_1 A)\ldots(I - \alpha_{p-1} A).$$

a) Préciser les valeurs propres $\nu_1, \ldots, \nu_n$ de la matrice $P_p(A)$, et montrer que $\rho(P_p(A)) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|\nu_i|)$ vérifie l'inégalité $\rho(P_p(A)) \leq \sup\{|P_p(t)| \,/\, \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\}$.

b) Établir que $X_p - X^* = P_p(A)\,(X_0 - X^*)$, puis que :

$$\|X_p - X^*\| \leq \sup\{|P_p(t)| \,/\, \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\}\|X_0 - X^*\|.$$

c) Lorsque l'entier p est fixé, comment peut-on choisir les nombres α_j où $0 \leq j \leq p-1$ pour minimiser le réel $\sup\{|P_p(t)| \,/\, \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\}$? Établir qu'on a alors :

$$\|X_p - X^*\| \leq \frac{1}{\left|T_p\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}\right)\right|}\|X_0 - X^*\|.$$

Montrer que $\left|T_p\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}\right)\right|$ est équivalent lorsque p tend vers $+\infty$ à $2^{p-1}\left(\dfrac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1}\right)^p$.

Comparer la convergence de la méthode itérative à α constant de la question 1° avec celle de la méthode itérative optimale développée à cette question.

***