MATHEMATIQUES I

Option scientifique

Rémi CHMURA

Description du problème

L'épreuve portait cette année sur des propriétés de signe des coefficients d'une matrice et de son inverse (partie I et II), sur des notions de convergence de suites de matrices (partie II) et enfin (partie III) sur une application à l'approximation d'une équation différentielle avec conditions aux limites.

La première partie débutait par la preuve de l'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante et une application : le théorème de Gershgörin, assorti d'un exemple calculatoire. Enfin, on démontrait que l'inverse d'une matrice vérifiant certaines conditions de signe (« la propriété (P) ») était à coefficients positifs.

Dans la deuxième partie, on définissait d'abord la notion de convergence d'une suite de matrices et on établissait quelques propriétés essentielles d'une norme matricielle, le tout de manière très détaillée puisque cette notion ne figure pas au programme. L'application ensuite de ces propriétés permettait d'obtenir la convergence de la suite des matrices inverses, puis la positivité des coefficients d'une matrice inverse sous réserve que la matrice de départ vérifie certaines propriétés de signe de ses coefficients.

La troisième partie traitait de l'équation différentielle $u'' = -f$ assortie de conditions aux limites. Après une résolution théorique (question 1a), on écrivait des inégalités de Taylor pour mettre en place une méthode d'approximation qui utilisait les résultats matriciels précédents.

La construction de l'énoncé était telle que les candidats ne restaient pas bloqués et pouvaient progresser dans le problème. Néanmoins, les manipulations d'inégalités, de valeur absolue, de maximum revenaient invariablement et ont vraiment fait la différence entre les candidats honnêtes et rigoureux et les autres.

Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, bien construit, de longueur raisonnable. Il était conforme au programme et à son esprit. Néanmoins, certains ont regretté que la partie analyse ne fasse appel qu'au programme de première année.

L'énoncé de la question appelant à la rédaction d'un algorithme en Pascal aurait certainement pu être plus précis et comportait d'ailleurs une erreur (il fallait faire une procédure et non une fonction pour renvoyer plusieurs arguments !). La correction des copies en a tenu compte et les candidats ayant montré leur aptitude à écrire des algorithmes consistants ont été récompensés.

32%, 36% et 32% des points ont été affectés aux trois parties décrites ci-dessus.

Commentaires sur la correction

Sur la forme, la plupart des copies sont bien écrites, bien présentées et rédigées convenablement. Cependant, il reste un nombre (apparu croissant cette année) de copies très peu soignées.

Sur le fond, on constate dans beaucoup trop de copies un manque de rigueur et de précision coupable. Même l'exemple de la matrice 3×3 n'est correctement traité que dans le tiers des copies. Il n'est pas acceptable de voir des questions telles que celles de II-1 réglées par deux équivalences ou par des affirmations érigées en démonstration : « si une somme de termes positifs est nulle alors tous les termes sont nuls » ... certes mais les limites dans tout ça ... (pour II-1b) ou encore (pour II-1g) $Max\left(\left|y_i+z_i\right|\right)\le Max\left(\left|y_i\right|\right)+Max\left(\left|z_i\right|\right)$ (assénée tel quel dans la plupart des copies).

De manière générale, dès le début du problème, la rigueur et l'honnêteté avec lesquelles les candidats manipulaient valeurs absolues, modules, inégalités triangulaires, ... faisaient la différence entre bonnes et moins bonnes copies.

La partie II a malheureusement vu se répéter des fautes grossières de raisonnement. La question 1a n'a jamais ou presque été traitée correctement. On y considère trop souvent l'indice i_0 tel que $m(X_k-X)=\left|x_{i_0}^{(k)}-x_{i_0}\right|$ sans penser que i_0 dépend de *k*.

L'inégalité $s\left(MN\right)\le s\left(M\right)s\left(N\right)$ est pour beaucoup immédiate à partir de la définition du produit matriciel et de l'inégalité triangulaire. Là encore, les correcteurs rappellent que seules la rigueur et l'honnêteté paient ...

Un autre exemple : beaucoup de candidats affirment à la question 3 que les matrices M_k vérifiant la propriété (P), il en est de même de leur limite *M* ... Encore une fois, rappelons la nécessité d'être lucide et de prendre du recul car on ne doute pas que la majorité de ces candidats savent énoncer que « les inégalités strictes ne passent pas à la limite ! »

La partie III n'a été sérieusement abordée que par les meilleurs. La seule réelle satisfaction est la part non négligeable de copies traitant avec à propos la question 1b (positivité de u) soit par concavité, soit par l'étude des variations de u à l'aide du théorème de Rolle.

L'existence de la solution de (S) à la question 1a, à de rares exceptions près, n'a jamais été traitée correctement. Les candidats ne l'envisagent le plus souvent même pas et pense avoir traité l'ensemble de la question en démontrant seulement l'unicité.

On notera à la question 2a que si quelquefois on obtient de correctes inégalités de Taylor, l'utilisation de l'inégalité triangulaire pour conclure est rarement maitrisée.

Enfin, quelques opportunistes se sont lancés dans l'étude de l'exemple, pour un maigre profit car ils n'avaient pas idée de la façon d'obtenir le *n* attendu.

Conclusion

Il ressort de cette correction une assez grande fragilité d'un certain nombre de candidats face à des questions qui, sans être excessivement difficiles, demandaient du soin, de la rigueur et un sens de la synthèse. Par ailleurs, de bons candidats ont su mettre à profit leurs connaissances et leur rigueur intellectuelle pour obtenir des résultats probants ; plusieurs excellentes copies ont même obtenu la note maximale. Au final, l'écart-type établi à 4,6 assure que l'épreuve a joué pleinement son rôle. La moyenne générale de l'épreuve s'établit à 09,2 ce qui reste globalement satisfaisant.

Correcteurs : Gilles BENSON, Rémi CHMURA, Alain COMBROUZE, Jean-François COSSUTTA, Benoit GUGGER, Jean-Pierre GONET, Hervé GUILLAUMIE, Thierry LEGAY, Laurent MAZLIAK, Yves MONLIBERT, Jean-Pierre SIAU.