

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Rémi CHMURA – Hervé GUILLAUMIE

Description du problème

L'épreuve portait sur l'étude du commutant d'un endomorphisme ou d'une partie de $L(E)$. La première partie permettait de se familiariser avec ces notions en faisant découvrir quelques propriétés élémentaires. La deuxième partie développait longuement un exemple en rapport avec le programme d'analyse (les séries). On demandait également aux étudiants de s'adapter à la présentation matricielle du problème.

On revenait ensuite à des problèmes d'algèbre linéaire : centre de $L(E)$ dans la troisième partie, commutant d'un endomorphisme diagonalisable dans la quatrième, et pour finir, bicommutant d'un tel endomorphisme dans la cinquième partie.

Les questions étaient de difficulté variée, certaines proches du cours et d'autres demandant de l'initiative et de la réflexion. L'ensemble a permis aux étudiants, maîtrisant les connaissances exigibles et capables d'attention et d'un bon esprit de synthèse, de progresser dans le problème pour y faire montre de leurs qualités.

Les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, bien construit, de longueur et de difficulté raisonnable. Il était conforme au programme et à son esprit. Néanmoins, certains ont regretté que la matrice T de la question 8 n'ait pas été précisée, mais force est de constater que des candidats ayant échoué à déterminer cette matrice ont su apporter des solutions pertinentes aux questions 9 et 10.

4%, 51%, 7%, 25% et 13% des points du barème ont été affectés aux cinq parties décrites ci-dessus.

Commentaires sur la correction

Comme l'an passé et les années précédentes, les correcteurs se sont plaints du manque de soin affiché par certains candidats. Les copies sales, ou peu lisibles ne peuvent qu'indisposer le correcteur.

C'est un appel fort qui doit être entendu : les copies se doivent d'être convenablement présentées. Heureusement, une majorité de candidats font l'effort de rédiger correctement et de mettre leurs conclusions en évidence. C'est, avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, un élément majeur dans l'appréciation des copies.

Dans la partie I, si les questions ont été majoritairement traitées par les candidats, on a constaté avec surprise que même la caractérisation des sous-espaces vectoriels n'est pas maîtrisée ; les quantifications inappropriées le montrent dans la question 1, où l'on trouve également souvent l'affirmation surprenante : $C(u)$ est non vide donc de dimension supérieure ou égale à 1. De même, la question 2 est parfois mal comprise (on montre $v \circ P(u) = P(u) \circ v$).

Dans la partie II, la question 4b a été traitée correctement par un tout petit nombre de candidats. Dans de nombreuses copies, les réponses aux questions 5 et 6 sont au mieux incomplètes car les candidats n'ont pas pris

la peine de bien lire les définitions des ensembles A, B, H, E . Par exemple, on ne montre pas l'absolue convergence de $\sum \lambda a_n + b_n$. On retrouve le même défaut à 6c, 8a et 8b où les réponses sont partielles faute d'avoir mesuré la portée de la question !

A noter que le fait que les suites α_n $n \geq 0$ et γ_n $n \geq 0$ ne correspondent pas tout à fait à φ et δ a posé problème et a entraîné quelques coupables tricheries dans les calculs ... Ou encore, ici, comme à la question 7, on a vu des candidats affirmer qu'il y avait sûrement une erreur d'énoncé, l'un ajoutant même que « c'est fréquent cette année » ... On ne saurait trop inciter les candidats à plus de prudence et d'humilité ...

Autre erreur constatée : des x dans les coefficients de la matrice T , ce qui révèle une incompréhension profonde de l'énoncé.

La question 7c a été souvent incomprise, mais aussi bâclée, les candidats estiment-ils dégradant de faire des calculs ?

Pour en finir avec cette partie, signalons qu'à la question 10^e, la réponse $\dim C u = 3$ a souvent été justifiée par $\text{rg} M_C v = 3$! Mais, on a vu dans de bonnes copies, $C u$ isomorphe à

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

La partie III a été très peu abordée. On a vu quelques réponses à la question 11, visiblement déjà rencontrée par ces candidats.

La quatrième partie, souvent largement balayée par les candidats, a eu son lot de réponses imprécises comme à la question 15 où on se contente de vérifier $v \circ u x = u \circ v x$ pour $x \in E_1$. A la question 18, l'équivalence est souvent galvaudée. La question 19 pourtant facile est paradoxalement peu abordée.

De manière générale, les raisonnements sur les polynômes d'endomorphismes manquaient de rigueur et on a vu par exemple $2X^3 + 3X^2 - X$ plutôt que $2X^3 + 3X^2 - 1$ (partie III 8c) et aussi des incohérences comme

$$\prod_{i=1}^p u x - \lambda_i x.$$

La dernière partie n'a réellement été abordée que dans les toutes meilleures copies. Les autres candidats un peu perdus qui voulaient simplement y trouver quelques points à grappiller n'avaient pas le recul nécessaire sur les définitions des objets manipulés pour apporter des réponses convaincantes.

Conclusion

Les correcteurs souhaitent unanimement insister sur le soin, la rigueur et l'honnêteté qui prévalent dans les bonnes copies. Ces qualités, heureusement présentes dans une bonne partie des copies, sont seules susceptibles de donner aux candidats des résultats à la mesure de leurs attentes.

Le barème adopté a engendré un très bon étalement des notes et le sujet a permis finalement de bien distinguer les meilleurs étudiants. Plusieurs excellentes copies ont obtenu la note maximale. L'écart-type de l'épreuve s'établit à 4,56 pour une moyenne générale de 10,30.

Correcteurs : Gilles BENSON, Rémi CHMURA, Alain COMBROUZE, Jean-François COSSUTTA, Benoît GUGGER, Jean-Pierre GONET, Hervé GUILLAUMIE, Thierry LEGAY, Laurent MAZLIAK, Yves MONLIBERT, Jean-Pierre SIAU.